

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA**

Raphael Eduardo Chagas Gonçalves

**DESENVOLVIMENTO DE MODELOS DE PROGRAMAÇÃO  
ESTOCÁSTICA APLICADOS À PROGRAMAÇÃO MENSAL DA  
OPERAÇÃO ENERGÉTICA: UMA ANÁLISE COMPARATIVA  
DE DESEMPENHO COMPUTACIONAL**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Edson Luiz da Silva,  
D. Eng.

Coorientador: Prof. Erlon Cristian  
Finardi, D. Eng.

Florianópolis

2011

**Catálogo na fonte elaborada pela biblioteca da  
Universidade Federal de Santa Catarina**

G635d Gonçalves, Raphael Eduardo Chagas  
Desenvolvimento de modelos de programação  
estocástica aplicados à programação mensal da operação  
energética [tese] : uma análise comparativa de  
desempenho computacional / Raphael Eduardo Chagas  
Gonçalves ; orientador, Edson Luiz da Silva. -  
Florianópolis, SC, 2011.  
211 p.: il., grafs., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Elétrica.

Inclui referências

1. Engenharia elétrica. 2. Sistemas de energia  
elétrica hidrotérmica. 3. Programação estocástica. I.  
Silva, Edson Luiz da. II. Universidade Federal de  
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica. III. Título.

CDU 621.3

Raphael Eduardo Chagas Gonçalves

**DESENVOLVIMENTO DE MODELOS DE PROGRAMAÇÃO  
ESTOCÁSTICA APLICADOS À PROGRAMAÇÃO MENSAL DA  
OPERAÇÃO ENERGÉTICA: UMA ANÁLISE COMPARATIVA  
DE DESEMPENHO COMPUTACIONAL**

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de “Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica*”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 08 de dezembro de 2011.

---

Prof. Patrick Kuo-Peng, Dr. INPT.  
Coordenador do Curso

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Edson Luiz da Silva, D. Eng.  
Orientador

---

Prof. Erlon Cristian Finardi, D. Eng.  
Coorientador

---

Prof(a). Claudia Sagastizabal, D. Habil.

---

Joari Paulo da Costa, D. Sc.

---

Prof. Antônio José Alves Simões Costa, Ph. D.



*Dedico esta tese a meus pais Rejane e Rogério, pelo apoio, encorajamento, amor e pelos importantes ensinamentos que me foram passados. A minha noiva Karim, pela paciência, amor, compreensão e também pela companhia nos momentos mais críticos dessa caminhada. A minha irmã Renatha e meu cunhado Ricardo pelos momentos de descontração e também pelo constante apoio. Por fim, a Isabel, minha "segunda mãe", que sempre tem torcido pelo meu sucesso e dedicado seu tempo às rotineiras orações pela minha proteção.*



## AGRADECIMENTOS

O desenvolvimento desta tese de doutorado não seria possível sem a participação ativa de diversas pessoas. Nesse sentido, gostaria de aproveitar a oportunidade para agradecê-las.

De antemão, ao *Prof. Dr. Eng. Edson Luiz da Silva*, meu orientador, pelo voto de confiança, pela fundamental contribuição no meu crescimento enquanto pesquisador e profissional, além da amizade adquirida ao longo desses anos.

Ao *Prof. Dr. Eng. Erlon Cristian Finardi*, meu coorientador, pela constante troca de conhecimentos, pelo trabalho conjunto em projetos, consultorias e cursos, os quais contribuíram substancialmente para um melhor amadurecimento pessoal e também profissional.

Aos membros das bancas de qualificação e defesa, *Prof(a). D. Habil. Claudia Sagastizabal*, *Prof. Ph. D. Antônio José Alves Simões Costa*, *D. Sc. Joari Paulo da Costa* e *Prof. D. Sc. José Mario Martínez* pelas contribuições relevantes que ajudaram a elevar o nível do trabalho.

Aos suplentes das bancas, *Dr. Eng. Marcelo Luis Loureiro dos Santos* e *Prof. Dr. Eng. Rubiapiara Cavalcante Fernandes*, pela disponibilidade de participar deste importante momento em minha vida acadêmica e profissional.

Aos demais professores do *Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica - LabPlan* vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da *Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC* pela convivência e por propiciarem um ambiente de trabalho extremamente agradável.

Aos amigos e companheiros de trabalho integrantes ou ex-integrantes do laboratório LabPlan, em especial, aqueles com quem compartilhei minhas dúvidas e que certamente ajudaram a direcionar os rumos de minha tese de doutorado. Convém exaltar também os bons momentos de lazer, descontração e inspiração que tornaram a jornada de estudo mais branda e agradável.

A toda minha família, especialmente, aos meus pais, *Rejane Eduardo Chagas Gonçalves* e *Rogério Augusto da Silva Gonçalves* pelo

incondicional apoio em todos os momentos de minha vida. À minha irmã *Renatha Eduardo Chagas Gonçalves Carubbi* e meu cunhado *Ricardo Carubbi* pela sólida amizade, confiança e força que sempre transmitiram.

À *Karim Cristina Piacentini*, minha grande amiga e noiva, que conheci no início do doutorado e, sem dúvida, participou juntamente comigo das fases mais importantes do desenvolvimento deste trabalho, sempre com palavras de conforto nos momentos mais difíceis, corroborando para um amadurecimento conjunto de nossa união.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq por financiar parte deste trabalho. Adicionalmente, à Agência Nacional de Energia Elétrica - Aneel por propiciar a execução de Projetos Estratégicos conjuntamente com diversos agentes do Setor Elétrico Brasileiro - SEB, em especial, a Tractebel Energia S.A e, desse modo, permitir um maior contato com indústria, complementando minha formação acadêmica e também dando um suporte financeiro para o desenvolvimento desta tese de doutorado.

Por fim, a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização deste trabalho.



"O sofrimento é passageiro. A desistência é para sempre."

(Lance Armstrong)



## RESUMO

O planejamento da operação energética de sistemas hidrotérmicos é usualmente dividido em etapas as quais apresentam diferentes horizontes de estudo e priorizam distintos aspectos da modelagem física do problema. A Programação Mensal da Operação Energética - PMO, que corresponde a uma das etapas de estudo do problema do planejamento da operação no caso brasileiro sob a ótica do Operador Nacional do Sistema - ONS, apresenta importantes resultados e, assim, suas particularidades são o objeto de estudo deste trabalho. Em particular, os modelos matemáticos utilizados nessa etapa tem o intuito de definir as estratégias semanais de geração das usinas integrantes do sistema com o menor custo esperado de operação, considerando as incertezas associadas às vazões afluentes aos reservatórios do sistema. Solucionar problemas com essas características requer o uso de métodos avançados de Programação Estocástica - PE. Neste trabalho tem-se o objetivo de avaliar as políticas resultantes e o desempenho computacional de dois algoritmos de PE quando aplicados ao problema relacionado à etapa do PMO. Inicialmente, destaca-se o estudo de diferentes estratégias de decomposição do problema via o método *Progressive Hedging* - PH no sentido de prover benefícios ao desempenho computacional do mesmo, além da avaliação de técnicas de partida quente e alternativas associadas à atualização de parâmetros internos para acelerar a convergência do método. Em seguida, uma análise comparativa entre o método de PH e a Decomposição Aninhada - DA, método atualmente vigente no Brasil, é apresentada sob o ponto de vista computacional e também no que diz respeito às políticas resultantes de ambos. Para tanto, o Sistema Interligado Nacional - SIN é utilizado.

**Palavras-chave:** Sistemas Hidrotérmicos, Programação Estocástica, Progressive Hedging, Decomposição Aninhada.



## ABSTRACT

The operation planning of hydrothermal systems is, in general, divided into coordinated steps which have different horizons and prioritize distinct details of the modeling. The Medium-term Operation Planning (MTOP) problem, one of the operation planning steps and the focus of this thesis, aims of defining the weekly generation for each plant, considering uncertainties related to water inflows to reservoirs, in order to obtain the minimum expected operational cost over a specific period. Solving this problem requires the use of multistage Stochastic Programming - SP algorithms. The purpose of this thesis is to evaluate the numerical results and the performance of two SP algorithms when applied to solve the MTOP problem. Initially, the Progressive Hedging method is presented, highlighting the study of the different decompositions schemes, the warm start techniques and other practical aspects of the method in order to enhance its computational performance. Next, a comparative analysis between the Nested Decomposition, a common approach for solving these kinds of problems, and the PH method is presented. In this context, given the different ways of attacking the problem, the efficiency of the parallel implementation for both algorithms is also observed. For that, the Brazilian interconnected power system is used to evaluate the results.

**Keywords:** Hydrothermal Systems, Multi-Stage Linear Stochastic Optimization, Progressive Hedging method, Nested Decomposition.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Percentual dos recursos de geração instalados no Brasil. ....	30
Figura 2. Etapas do planejamento energético utilizado no SEB. ....	33
Figura 3. Configuração Hidrotérmica. ....	48
Figura 4. Possibilidades de volumes afluentes ao reservatório do sistema. ....	51
Figura 5. Sequência de decisões. ....	57
Figura 6. Árvore de cenários considerando três realizações de segundo estágio. ....	60
Figura 7. Outra maneira de representa a árvore de cenários da Figura 6, onde a não-antecipatividade está representa em sua forma explícita. ....	61
Figura 8. Estrutura matricial do problema (11)-(12). ....	62
Figura 9. Estrutura matricial do problema (17)-(18). ....	63
Figura 10. Algoritmo de solução da DA. ....	72
Figura 11. Algoritmo de solução do método de PH. ....	76
Figura 12. Árvore de cenários do modelo DECOMP. ....	83
Figura 13. Patamares de Carga. ....	85
Figura 14. Interligação entre Itaipu e as regiões SE e SU. ....	90
Figura 15. Representação de uma usina de bombeamento. ....	94
Figura 16. Função de produção de uma usina hidrelétrica integrante do SIN. ....	96
Figura 17. Envoltória côncava tangente à FPH considerando um valor específico no volume do reservatório e desprezando vazão vertida. ....	97
Figura 18. FPH linear por partes. ....	100
Figura 19. Sistema Interligado Nacional. ....	109
Figura 20. Média e desvio padrão para o mês de Janeiro em $m^3/s$ . ....	112
Figura 21. Médio e desvio padrão para o mês de Junho em $m^3/s$ . ....	112
Figura 22. Evolução do parâmetro de penalidade com base em (86) para a decomposição Clássica no mês de Janeiro. ....	117
Figura 23. Erro Absoluto - Mês de Janeiro. ....	118
Figura 24. Erro Absoluto - Mês de Junho. ....	118
Figura 25. <i>Speed-up</i> para as diferentes estratégias de decomposição para ambos os meses. ....	123
Figura 26. Geração Hidrelétrica - Mês de Janeiro. ....	124
Figura 27. Geração Termelétrica - Mês de Janeiro. ....	124
Figura 28. CMO - Mês de Janeiro. ....	125
Figura 29. Geração Hidrelétrica - Mês de Junho. ....	125
Figura 30. Geração Termelétrica - Mês de Junho. ....	126
Figura 31. CMO - Mês de Junho. ....	126
Figura 32. Comparação entre os níveis de geração das usinas hidrelétricas para os diferentes horizontes de estudos. ....	131
Figura 33. Comparação entre os níveis de geração das usinas termelétricas para os diferentes horizontes de estudos. ....	131
Figura 34. Comparação entre os CMOs para os diferentes horizontes de estudos. ....	132
Figura 35. Evolução dos CMOs médios. ....	134

Figura 36. Perfil de Geração Hidrelétrica para o PMO de Junho de 2009 considerando diferentes números de aproximações na construção da FPH. ....	139
Figura 37. Perfil de Geração Termelétrica para o PMO de Junho de 2009 considerando diferentes números de aproximações na construção da FPH. ....	140
Figura 38. CMO para o PMO de Junho de 2009 considerando diferentes números de aproximações na construção da FPH. ....	140
Figura 39. Perfis de geração hidrelétrica dos métodos de decomposição considerando 15 aproximações na FPH - Janeiro. ....	142
Figura 40. Perfis de geração termelétrica dos métodos de decomposição considerando 15 aproximações na FPH - Janeiro. ....	143
Figura 41. CMOs resultantes dos métodos de decomposição considerando 15 aproximações na FPH - Janeiro. ....	143
Figura 42. Árvore de cenários - Caso 2. ....	145
Figura 43. Desvio Absoluto Mês de Junho para um critério de parada alternativo - associado ao tempo de processamento da DA. ....	148
Figura 44. Evolução do critério <i>D</i> . ....	149
Figura 45. Análise comparativa dos CMOs entre as metodologias e também considerando os casos com e sem incertezas semanais - Janeiro. ....	149
Figura 46. Análise comparativa dos CMOs entre as metodologias e também considerando os casos com e sem incertezas semanais - Junho. ....	150
Figura 47. <i>Speed-up</i> para o mês de Janeiro. ....	152
Figura 48. <i>Speed-up</i> para o mês de Junho. ....	153
Figura 49. <i>Speed-up</i> DA para um número elevado de processadores. ....	154
Figura 50. Processo iterativo da DA. ....	156
Figura 51. Perfis das gerações das usinas hidrelétricas para o primeiro estágios do horizonte de estudo por subsistema. ....	157
Figura 52. Perfis das gerações das usinas termelétricas para o primeiro estágios do horizonte de estudo por subsistema. ....	158
Figura 53. CMOs para o primeiro estágios do horizonte de estudo por subsistema. ....	158
Figura 54. Primeira recursão direta. ....	170
Figura 55 Segunda recursão direta. ....	172
Figura 56. Convergência da DA. ....	172
Figura 57. Árvore de cenários do exemplo proposto. ....	173
Figura 58. Norma do vetor gradiente. ....	179
Figura 59. Usinas localizadas em uma mesma cascata. ....	188
Figura 60. Configuração hidrotérmica e árvore de cenários. ....	189



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Dados das usinas termelétricas.....	49
Tabela 2. Solução do problema (2)-(3). ....	50
Tabela 3. Solução do problema (2)-(3) para volume afluente elevado. ....	51
Tabela 4. Solução do problema (2)-(3) para volume afluente baixo. ....	51
Tabela 5. Solução do problema (4)-(5). ....	53
Tabela 6. Dados das RV0 dos PMOs usados no estudo de casos.....	112
Tabela 7. Análise de diferentes parâmetros de penalidade no desempenho dos esquemas de decomposição - Janeiro.....	114
Tabela 8. Análise de diferentes parâmetros de penalidade no desempenho dos esquemas de decomposição - Junho.....	114
Tabela 9. Análise de desempenho dos esquemas de decomposição utilizando a heurística descrita em (86) - Janeiro. ....	116
Tabela 10. Análise de desempenho dos esquemas de decomposição utilizando a heurística descrita em (86) - Junho. ....	116
Tabela 11. Análise de desempenho dos esquemas de decomposição utilizando a heurística descrita em (88) - Janeiro. ....	119
Tabela 12. Análise de desempenho dos esquemas de decomposição utilizando a heurística descrita em (88) - Junho. ....	120
Tabela 13. Análise de desempenho dos esquemas de decomposição utilizando programação de alto desempenho - Janeiro. ....	122
Tabela 14. Análise de desempenho dos esquemas de decomposição utilizando programação de alto desempenho - Junho. ....	122
Tabela 15. Composição da função objetivo do problema - Janeiro.....	127
Tabela 16. Composição da função objetivo do problema - Junho. ....	128
Tabela 17. Características da árvore de cenários. ....	129
Tabela 18. Desempenho dos esquemas de decomposição para um horizonte de estudo estendido.....	129
Tabela 19. Análise do impacto do uso de técnicas de partida quente - RV1 Janeiro.....	133
Tabela 20. Análise do impacto do uso de técnicas de partida quente - RV1 Junho.....	133
Tabela 21. Comparação entre os algoritmos seriais para uma representação simplificada (2 aproximações) da FPH - Janeiro. ....	136
Tabela 22. Comparação entre os algoritmos seriais para uma representação simplificada (2 aproximações) da FPH - Junho. ....	136
Tabela 23. Comparação entre os algoritmos seriais para uma representação da FPH com 15 aproximações - Janeiro. ....	136
Tabela 24. Comparação entre os algoritmos seriais para uma representação da FPH com 15 aproximações - Junho. ....	136
Tabela 25. Tamanhos dos subproblemas - FPH simplificada (2 aproximações). ....	137
Tabela 26. Tamanhos dos subproblemas - FPH linear por partes (15 aproximações).....	137

Tabela 27. Composição da função objetivo considerando as duas representações da FPH - Janeiro. ....	138
Tabela 28. Composição da função objetivo considerando as duas representações da FPH - Junho. ....	138
Tabela 29. Comparação entre diferentes FPH via DA - Janeiro. ....	141
Tabela 30. Comparação entre diferentes FPH via DA - Junho. ....	141
Tabela 31. Características do Caso 2. ....	145
Tabela 32. Comparação entre os métodos considerando uma árvore de cenários com incertezas semanais - Janeiro. ....	147
Tabela 33. Comparação entre os métodos considerando uma árvore de cenários com incertezas semanais - Junho. ....	147
Tabela 34. Comparação entre os algoritmos para uma árvore de cenários de grande porte com critério de parada associado ao tempo de processamento da DA - Junho. ....	148
Tabela 35. Comparação entre os métodos considerando o algoritmo de programação paralela dos métodos- Janeiro. ....	152
Tabela 36. Comparação entre os métodos considerando o algoritmo de programação paralela dos métodos - Junho. ....	152
Tabela 37. Tamanhos dos problemas/subproblemas do PMO. ....	154
Tabela 38. Comparação entre os algoritmos quando o horizonte de planejamento é estendido - Semente 1. ....	155
Tabela 39. Comparação entre os algoritmos quando o horizonte de planejamento é estendido - Semente 2. ....	155
Tabela 40. Comparação entre os algoritmos quando o horizonte de planejamento é estendido - Semente 3. ....	155
Tabela 41. Comparação entre os algoritmos quando o horizonte de planejamento é estendido - Semente 4. ....	155
Tabela 42. Comparação entre os algoritmos quando o horizonte de planejamento é estendido - Semente 5. ....	155
Tabela 43. 1ª iteração do método de PH. ....	177
Tabela 44. Valores metas ao final da 1ª iteração. ....	177
Tabela 45. Multiplicadores de Lagrange resultante da solução do problema dual do final da 1ª iteração. ....	178
Tabela 46. Solução ótima do método de PH. ....	178

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADQ:	Aproximação Diagonal Quadrática
ANDE:	<i>Administración Nacional de Electricidad</i>
ANEEL:	Agência Nacional de Energia Elétrica
ARP:	Auto-regressivo Periódico
CCEE:	Câmara de Comercialização de Energia Elétrica
CEPEL:	Centro de Pesquisas de Energia Elétrica
CMO:	Custo Marginal de Operação
CVU:	Custo Variável Unitário
DA:	Decomposição Aninhada
DB:	Decomposição de Benders
ED:	Equivalente Determinístico
FCF:	Função de Custo Futuro
FPH:	Função de Produção das Usinas Hidrelétricas
LA:	Lagrangeano Aumentado
MPI:	Message Passing Interface
ONS:	Operador Nacional do Sistema Elétrico
PD:	Programação Dinâmica
PDDE:	Programação Dinâmica Dual Estocástica
PDE:	Programação Diária da Operação Eletroenergética
PDES:	Programação Dinâmica Estocástica
PE:	Programação Estocástica
PEL:	Programação Estocástica Linear
PEN:	Planejamento Anual da Operação Energética
PG&E:	<i>Pacific Gas and Electric Company</i>
PH:	Progressive Hedging
PI:	Pontos Interiores
PL:	Programação Linear
PLD:	Preço de Liquidação de Diferenças
PMO:	Programa Mensal da Operação Energética
PPA:	Princípio do Problema Auxiliar
PQ:	Programação Quadrática
PR:	Problema com recurso
PVE:	Problema do Valor Esperado
REPVE:	Resultado Esperado do Problema do Valor Esperado
RL:	Relaxação Lagrangeana
SEB:	Setor Elétrico Brasileiro
SIN:	Sistema Interligado Nacional
VEIP:	Valor Esperado da Informação Perfeita

VSS: Valor da Solução Estocástica  
WS: *Wait-and-See*

## LISTA DE SÍMBOLOS

$T$	número total de estágios do horizonte de estudo;
$t$	índices associados aos estágios, tal que $t=1,...,T$ ;
$z$	valor da função objetivo;
$\xi_t$	variáveis aleatórias associadas ao estágio $t$ ;
$\bar{\xi}$	valor esperado das variáveis aleatórias, $\xi$ .
$\Omega_t$	conjunto de realizações (nós) no estágio $t$ ;
$\omega_t$	Realização (nó) em um determinado estágio $t$ , tal que $\omega_t \in \Omega_t$ ;
$c_t$	vetor de custos relativos ao estágio $t$ ;
$x_t$	vetor de decisões referentes ao estágio $t$ , tal que $x \in \mathcal{R}^n$ ;
$y_t$	subconjunto de $x_t$ , tal que $y_t = x_t - \bar{x}_t$ no estágio $t$ ;
$S$	número total de cenários (conjunto de realizações);
$s$	índice associado aos cenários, tal que $s = 1,...,S$ .
$A_t$	matriz de coeficientes das restrições no estágio $t$ de dimensão $m_t \times n_t$ , tal que $A_t = \bar{A}_t + \tilde{A}_t$ , em que $\bar{A}_t$ e $\tilde{A}_t$ tem a mesma dimensão $m_t \times n_t$ ;
$B_t$	matriz de acoplamento (matriz recurso ou matriz tecnologia) no estágio $t$ com dimensão $m_t \times n_t$ ;
$b_t$	vetor independente no estágio $t$ para um específico nó $\omega$ ou cenário $s$ . Em geral, a aleatoriedade está associada a esse vetor;
$p^{\omega s}$	probabilidade associada à realização (nó) $\omega$ ou ao conjunto de realização (cenário) $s$ ;
$\Psi_t^s$	conjunto de todos os cenários associados ao cenário $s$ no estágio $t$ de acordo com a não-antecipatividade;
$\bar{s}$	todos os cenários pertencentes ao conjunto $\Psi_t^s$ ;
$W_s^t$	matriz associada a não-antecipatividade considerando o cenário $s$ e estágio $t$ ;
$\pi$	vetor de multiplicador de Lagrange relacionado com o nível de armazenamento do reservatório para a DA ou associado à não-antecipatividade no algoritmo do método de PH;
$\Phi$	função lagrangeana relacionada com o método de PH;
$\mu$	parâmetro de penalidade utilizado no algoritmo do método de PH;
$iter$	índice associado ao número de iterações;
$D$	critério de convergência do algoritmo do método de PH;
$\varepsilon$	tolerância para o algoritmo do método de PH;
$\sigma$	fator de ajuste para atualização do parâmetro de penalidade $\mu$

	no algoritmo do método de PH;
$I$	número total de usinas hidrelétricas do sistema;
$i$	índice associado às usinas hidrelétricas do sistema;
$v_i$	volume armazenado no $i$ -ésimo reservatório ( $\text{hm}^3$ );
$q_i$	vazão turbinada pelo $i$ -ésimo reservatório ( $\text{m}^3/\text{s}$ );
$sp_i$	vazão vertida pelo $i$ -ésimo reservatório ( $\text{m}^3/\text{s}$ );
$a_i$	vazão afluyente incremental ao $i$ -ésimo reservatório ( $\text{m}^3/\text{s}$ );
$J$	número total de usinas termelétricas;
$j$	índice associado às usinas termelétricas;
$ct_j$	custo variável unitário da $j$ -ésima usina termelétrica ( $\text{R\$}/\text{MWh}$ );
$gt_j$	energia gerada pela $j$ -ésima usina termelétrica ( $\text{MWmédio}$ );
$gh_i$	energia gerada pela $i$ -ésima usina hidrelétrica ( $\text{MWmédio}$ );
$L_t$	demanda de energia durante o estágio $t$ ;
$C$	fator de conversão da unidade de vazão ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) para unidade de volume ( $\text{hm}^3$ );
$U$	número total de patamares de carga;
$u$	índice associado ao número de patamares de carga;
$\delta_{ut}$	percentual de horas no $u$ -ésimo patamar do estágio $t$ . Esse valor representa o tempo de duração de cada patamar de carga no estágio correspondente. Logo, $\sum_{u=1}^U \delta_{ut} = 1$ ;
$E$	número total de subsistemas;
$e$	índice relacionado ao subsistema;
$\Gamma e$	conjunto de subsistemas eletricamente conectados ao subsistema $e$ ;
$f_{leut}$	fluxo de energia do subsistema $l$ para o subsistema $e$ durante o patamar $u$ do estágio $t$ ( $\text{MWmédio}$ );
$M_i$	conjunto de usinas imediatamente à montante da usina $i$ ;
$m$	índice associado com o conjunto de usinas imediatamente à montante da usina $i$ ;
$f_{leut}^{\min}$	limite mínimo de fluxo de energia entre os subsistemas $l$ e $e$ durante o patamar $u$ do estágio $t$ ;
$f_{leut}^{\max}$	limite máximo de fluxo de energia entre os subsistemas $l$ e $e$ durante o patamar $u$ do estágio $t$ ;
$v$	índice relativo à curva de custo de déficit por percentual da carga;
$Y$	número total de curvas de custo de déficit;
$\gamma_v$	intervalo da curva de custo de déficit em percentual da carga. Dito de outra forma, esse valor deve assumir valores

	percentuais para os variados níveis de carga, de tal forma que $\sum_{v=1}^Y \gamma_v = 1$ . Assim, se $Y$ for igual a 4, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ podem assumir os seguintes valores: como 0,05, 0,05, 0,10 e 0,80, respectivamente. Observe que a soma dos mesmos é igual a 1;
$cd_{veu}$	custo de penalidade associado ao déficit de energia no $e$ -ésimo subsistema, $v$ -ésimo patamar de déficit e $u$ -ésimo patamar de carga (R\$/MWh);
$d_{vuet}$	déficit de energia no $v$ -ésimo patamar de déficit durante o patamar $u$ do subsistema $e$ no estágio $t$ (MW médio);
$tv$	refere-se o tempo de viagem da água entre usinas. Em geral, é menor que uma semana e, portanto, deve ser considerado no mesmo estágio. Contudo, caso seja diferente da duração do estágio $t$ , deve ser incorporado ao estágio seguinte;
$L_{ute}^{\max}$	demanda máxima de energia no subsistema $e$ durante o patamar $u$ do estágio $t$ (MW médio);
$R$	número total de aproximações lineares da FCF;
$r$	índice associado à aproximação linear da FCF;
$\alpha_T$	custo futuro (R\$);
$G$	ordem máxima do modelo auto-regressivo considerado no modelo NEWAVE;
$\alpha^*$	valor constante associado à $c$ -ésima aproximação linear da FCF;
$ea_e$	energia armazenada no $e$ -ésimo subsistema (MW med);
$g$	índice associado à ordem do modelo auto-regressivo utilizado no NEWAVE;
$ea_f_e$	energia afluyente no $e$ -ésimo subsistema (MW mes). Esses valores são dados de entrada do problema. É importante comentar que para o cálculo da energia afluyente para o primeiro mês de estudo do PMO (dividido em semanas) é considerado um valor médio que leva em consideração o número de dias que pertencem ao mês de estudo, bem como a quantidade de horas de cada estágio;
$\alpha^0$	coeficiente linear da FCF;
$\Xi_i$	é o conjunto formado pela $i$ -ésima usina e todas aquelas à jusante dela em um dado subsistema;
$p_i$	é a produtividade da $i$ -ésima usina hidrelétrica calculada para a altura equivalente;
$\kappa$	consumo específico da unidade de bombeamento (MW med/m <sup>3</sup> /s);

$N$	número total de pontos da função, os quais são considerados para o cálculo das aproximações lineares da FPH;
$n$	índice relacionado com a “grade” de discretização, isto é, pontos da função exata onde são construídas as aproximações lineares da FPH;
$\sigma_{in}$	fator de correção escalar que reduz o erro médio quadrático entre a função de produção exata e a aproximada da $i$ -ésima usina hidrelétrica e no ponto $n$ ;
$X$	quantidade total de pontos utilizados no cálculo do erro médio quadrático;
$\chi$	índice associado aos pontos utilizados no cálculo do erro médio quadrático.



# SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>29</b>
1.1	INTRODUÇÃO .....	29
1.2	RELEVÂNCIA DO TRABALHO .....	34
1.3	OBJETIVOS .....	37
1.3.1	<i>Objetivos Gerais.....</i>	<i>37</i>
1.3.2	<i>Objetivos Específicos .....</i>	<i>38</i>
1.4	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	39
1.5	CONTRIBUIÇÕES E ESTRUTURA DO TRABALHO.....	44
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA .....</b>	<b>47</b>
2.1	INTRODUÇÃO .....	47
2.2	SOLUÇÃO DETERMINÍSTICA <i>VERSUS</i> ESTOCÁSTICA .....	48
2.3	ASPECTOS DE MODELAGEM E INCERTEZAS.....	56
2.3.1	<i>Formulação de Problemas Estocásticos.....</i>	<i>57</i>
2.3.2	<i>Representação das Incertezas.....</i>	<i>60</i>
2.3.3	<i>Estrutura de Dados.....</i>	<i>62</i>
2.4	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	63
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA .....</b>	<b>65</b>
3.1	INTRODUÇÃO .....	65
3.2	PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA MULTISTÁGIO .....	65
3.3	MÉTODOS DE SOLUÇÃO .....	67
3.3.1	<i>Decomposição Aninhada .....</i>	<i>67</i>
3.3.2	<i>O método de Progressive Hedging .....</i>	<i>72</i>
3.4	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	80
<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>O PROBLEMA DA PROGRAMAÇÃO DA OPERAÇÃO ENERGÉTICA</b>	<b>81</b>
4.1	INTRODUÇÃO .....	81
4.2	CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA .....	82
4.3	ASPECTOS DA MODELAGEM .....	84
4.3.1	<i>Representação dos patamares de carga .....</i>	<i>85</i>
4.3.2	<i>Acoplamento espacial entre usinas hidrelétricas.....</i>	<i>87</i>
4.3.3	<i>Limite de fluxo entre subsistemas .....</i>	<i>87</i>
4.3.4	<i>Representação de curvas de déficit por patamar.....</i>	<i>88</i>
4.3.5	<i>Representação das restrições de transmissão associadas à Itaipu</i>	<i>90</i>

4.3.6	<i>Acoplamento com o Planejamento Anual da Operação.....</i>	91
4.3.7	<i>Representação das usinas de bombeamento .....</i>	94
4.3.8	<i>Função de Produção das Usinas Hidrelétricas .....</i>	95
4.4	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DO PMO .....	101
4.4.1	<i>Equivalente Determinístico.....</i>	101
4.4.2	<i>Decomposição Aninhada.....</i>	103
4.4.3	<i>Progressive Hedging.....</i>	104
4.5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	105
<b>CAPÍTULO 5</b>	<b>RESULTADOS COMPUTACIONAIS .....</b>	<b>107</b>
5.1	INTRODUÇÃO .....	107
5.2	CARACTERÍSTICAS GERAIS DO SISTEMA HIDROTÉRMICO .....	108
5.3	ESTUDO DE CASOS.....	110
5.3.1	<i>Caso 1 - Avaliação dos aspectos metodológicos do método de Progressive Hedging .....</i>	111
5.3.2	<i>Caso 2 - Comparação entre o método de Progressive Hedging e a Decomposição Aninhada.....</i>	135
5.4	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	159
<b>CAPÍTULO 6</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b>	
	<b>163</b>	
6.1	INTRODUÇÃO .....	163
6.2	CONCLUSÕES .....	163
6.3	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	166
<b>APÊNDICE A.</b>	<b>EXEMPLO NUMÉRICO DOS MÉTODOS DE</b>	
<b>DECOMPOSIÇÃO .....</b>	<b>169</b>	
A.1	INTRODUÇÃO .....	169
A.2	DECOMPOSIÇÃO ANINHADA .....	169
A.3	PROGRESSIVE HEDGING .....	173
<b>APÊNDICE B.</b>	<b>MÉTODOS ALTERNATIVOS PARA RESOLVER OS</b>	
<b>SUBPROBLEMAS QUADRÁTICOS RESULTANTES DO PROGRESSIVE</b>		
<b>HEDGING</b>	<b>181</b>	
B.1	INTRODUÇÃO .....	181
B.2	RELAXAÇÃO LAGRANGEANA.....	182
B.3	LAGRANGEANO AUMENTADO .....	183
<b>APÊNDICE C.</b>	<b>CÁLCULO DAS ENERGIAS ARMAZENADAS E AFLUENTES</b>	
	<b>187</b>	

C.1	INTRODUÇÃO .....	187
C.2	ENERGIA ARMAZENADA .....	187
C.3	ENERGIA AFLUENTE .....	188

<b>APÊNDICE D.</b>	<b>IMPACTOS DO TEMPO DE VIAGEM NO ALGORITMO DE SOLUÇÃO DA DECOMPOSIÇÃO ANINHADA .....</b>	<b>189</b>
--------------------	---	------------

<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>199</b>
--------------------	------------



# **CAPÍTULO 1**

## **INTRODUÇÃO**

---

### **1.1 INTRODUÇÃO**

Sistemas de energia elétrica têm por propósito fornecer energia elétrica aos consumidores finais em quantidades desejadas por estes, seguindo um padrão de qualidade estabelecido e proporcionando o menor custo possível para os mesmos. A operação de sistemas dessa natureza abrange um largo espectro de complexas atividades, as quais podem ser divididas em distintos setores, de acordo com seu objetivo principal: geração (prover energia elétrica); transmissão (transportar energia elétrica); distribuição (distribuir energia elétrica aos consumidores finais) e comercialização (compra/venda de energia elétrica). Neste trabalho, as particularidades relacionadas com a geração de energia são, especialmente, discutidas.

Os sistemas de geração de energia elétrica podem ser classificados em função do tipo de unidades geradoras que os compõem: termelétricos (obtem energia elétrica por meio da transformação de energia térmica) ou hidrelétricos (obtem energia elétrica por meio do aproveitamento do potencial hidrelétrico). É bem verdade que sistemas compostos unicamente por fontes hidrelétricas são raros. No entanto, a classificação é interessante a fim de destacar os princípios que envolvem a obtenção de energia em cada um dos sistemas individualmente.

O sistema brasileiro de geração de energia elétrica é composto por usinas termelétricas, hidrelétricas e ainda por uma crescente participação de fontes alternativas, com uma grande predominância de recursos hidrelétricos, os quais estão localizados em doze bacias hidrográficas nas diferentes regiões do país. A fim de ilustrar essa característica e tendo em vista que os estudos efetuados neste trabalho tem por foco o Sistema Interligado Nacional - SIN, na Figura 1 está ilustrada, em termos de capacidade instalada, a composição atual dos recursos de geração utilizados no Brasil (ANEEL, 2011).

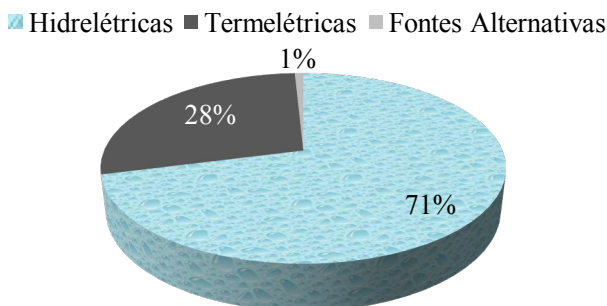


Figura 1. Percentual dos recursos de geração instalados no Brasil.

Fonte: Agência Nacional de Energia Elétrica - Aneel (2011).

Note que cerca de 70% do total de potência instalada, atualmente igual a 116 GW, está associado às usinas hidrelétricas. Em virtude dessa característica, os aspectos que envolvem a representação/modelagem das usinas hidrelétricas e suas particularidades recebem atenção especial nos estudos efetuados no Brasil e, por conseguinte, neste trabalho.

De antemão, convém ressaltar que a produção das usinas hidrelétricas está diretamente relacionada com o armazenamento de água (“combustível”) nos reservatórios. Assim, é de interesse estabelecer uma relação entre o montante de água armazenado em um momento presente e as expectativas futuras de armazenamento, em virtude da capacidade limitada de armazenamento dos reservatórios e da disponibilidade de água afluente aos mesmos. Assim, há uma interdependência temporal entre decisões operativas.

Essas decisões são fortemente influenciadas pela quantidade de água afluente aos reservatórios do sistema, a qual é incerta. Por exemplo, no caso brasileiro, as características geográficas (o relevo, a hidrografia, a vegetação e a geologia) não possibilitam a realização de

previsões precisas das afluições com larga antecedência. Nesse contexto, estudos que desprezam essas incertezas em horizontes semanais e/ou mensais podem produzir resultados insatisfatórios, uma vez que as decisões são elaboradas com base em uma única possibilidade de ocorrência futura e, consequentemente, como menor chance de se realizar.

A fim de exemplificar tal afirmação, imagine que valores médios das vazões afluentes históricas tenham sido usados como possíveis afluições futuras. Nesse caso, os resultados do estudo não contemplam “proteções” contra cenários secos (baixa afluição). Caso tais cenários ocorram, recursos mais caros e/ou ineficientes podem ser urgentemente utilizados para suprir a demanda ou, ainda, pode haver déficit (falta) de energia no sistema. Por outro lado, se cenários úmidos (alta afluição) ocorrerem e os níveis dos reservatórios permanecerem elevados em virtude de uma perspectiva futura equivocada, pode haver desperdício de energia no sistema. Desse modo, é importante manter o equilíbrio entre as decisões operativas no presente e os ganhos associados ao nível de armazenamento futuro considerando as incertezas intrínsecas ao problema.

Na operação de usinas hidrelétricas também devem ser observadas as localizações das usinas nos rios. Esse fato pode produzir uma dependência operativa entre as usinas situadas em sequência na mesma cascata de um rio ou seus afluentes. Ou seja, a operação de uma usina a jusante na cascata está também sujeita a quantidade de água utilizada na operação de uma usina a montante, uma vez que essa compõe a vazão afluente total à usina de jusante. Portanto, pode haver um acoplamento espacial entre usinas hidrelétricas, como ocorre no caso brasileiro.

Além dos aspectos operativos das usinas hidrelétricas, é conveniente lembrar que no SIN existem longas linhas de transmissão, com o intuito de possibilitar o escoamento da produção de energia até os centros de carga e, adicionalmente, interligar áreas distantes geograficamente permitindo a troca energia entre as mesmas. Em virtude desse fato, existe a possibilidade fazer uso da complementaridade energética entre regiões com regimes hidrometeorológicos distintos por meio da interconexão elétrica, obtendo-se então uma sinergia importante para a operação do sistema (melhor uso dos recursos de geração). Logo, os riscos relacionados ao regime hidrológico, como a escassez de energia em uma determinada região, podem ser mitigados.

Todas as características citadas, somadas ao grande número de usinas, demonstram a complexidade da operação energética de sistemas hidrotérmicos com a predominância de usinas hidrelétricas. Em outras palavras, definir de forma economicamente viável a produção de energia elétrica a fim de atender à demanda do sistema, considerando as inúmeras características operativas existentes, exige um esforço computacional elevado.

Nesse sentido, é consenso que a adoção de um único modelo matemático que represente fielmente todas as peculiaridades de um sistema hidrotérmico em problemas relacionados com programação da operação é impraticável mesmo com a recente evolução de métodos matemáticos e sistemas computacionais, em especial, quando são estudados horizontes mais extensos (por exemplo, iguais a cinco anos). Assim, a ideia usual consiste em dividir o problema em etapas interconectadas, às quais estão associados distintos horizontes e priorizam diferentes detalhes da modelagem física do problema.

No caso brasileiro, com o intento de viabilizar a solução do problema do planejamento da operação, cujo horizonte é igual a cinco anos, Pereira e Pinto (1984) propuseram uma cadeia de modelos coordenados entre si. Essa cadeia foi implementada pelo Centro de Pesquisas de Energia Elétrica – CEPEL e adotada pelo Operador Nacional do Sistema Elétrico – ONS. Cada etapa desse estudo apresenta um grau de detalhamento físico inversamente proporcional ao horizonte individual de análise. Em outras palavras, quanto maior o horizonte de estudo, menor é o detalhamento da modelagem das características operativas do sistema. O Planejamento Anual da Operação Energética – PEN (ONS, 2011d), o Programa Mensal da Operação Energética – PMO (ONS, 2011c) e a Programação Diária da Operação Eletroenergética – PDE (ONS, 2011b) são as principais etapas que compõem essa cadeia, conforme apresentado na Figura 2.



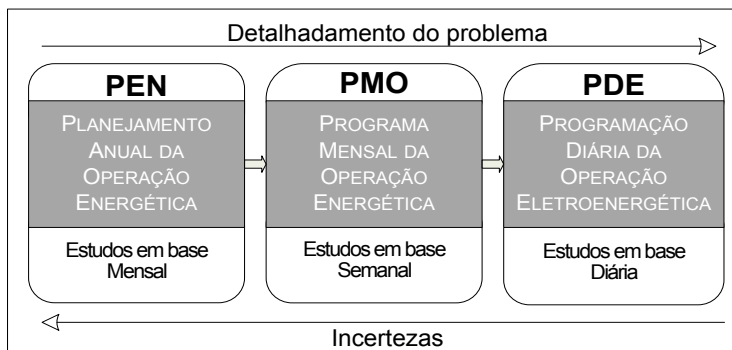


Figura 2. Etapas do planejamento energético utilizado no SEB.

Todas as etapas têm o objetivo comum de atender a demanda com o menor valor esperado do custo de operação do sistema e com um nível adequado de confiabilidade, proporcionando a utilização eficiente dos recursos de geração disponíveis para cada horizonte de análise.

No PEN são efetuados estudos em base mensal para um horizonte de cinco anos. Esse estudo é elaborado anualmente, sendo revisado a cada quadrimestre, com o intuito de agregar revisões nas informações básicas. Em vista do horizonte estendido, simplificações na modelagem do problema são consideradas, priorizando-se as incertezas. A principal ferramenta computacional utilizada nessa fase do estudo é o modelo NEWAVE (CEPEL, 2010a), o qual corresponde a um modelo de otimização linear, estocástico, e considera um reservatório equivalente de energia para cada subsistema integrante do SEB (Sul - SU, Sudeste/Centro-Oeste - SE, Nordeste - NE e Norte - NO). Dado o acoplamento entre as etapas, um dos principais objetivos do NEWAVE consiste em calcular a Função de Custo Futuro - FCF, a qual contém informações sobre o custo futuro de operação como função do volume armazenado (energia armazenada) nos reservatórios equivalentes de cada mês e da tendência hidrológica verificada nos estágios anteriores em cada subsistema. Além disso, essa etapa do planejamento indica também a probabilidade de déficits futuros, intercâmbios de energia, montantes de geração termelétrica, entre outros.

Na sequência da cadeia, o modelo computacional utilizado PMO faz uso da FCF obtida no modelo NEWAVE, a fim de determinar o despacho individual de todas as usinas integrantes do SIN, bem como os intercâmbios entre subsistemas para cada semana do mês seguinte.

Diferentemente da etapa anterior, esse estudo é realizado mensalmente, com revisões semanais em decorrência das frequentes mudanças ocorridas no sistema, como, por exemplo, a variabilidade hidrológica e a manutenção de unidades de geração. Também são resultados desse estudo: Custos Marginais de Operação – CMOs, validação dos programas de manutenção, níveis de geração e diretivas energéticas a serem implementadas na PDE. A principal ferramenta computacional utilizada é o modelo DECOMP (CEPEL, 2010b), que, por modelar as usinas de forma individualizada, considera a estocasticidade associada às vazões afluentes de cada reservatório do sistema em vez de associadas às energias afluentes como no modelo NEWAVE.

Por fim, a PDE, última etapa da cadeia, visa estabelecer os níveis de geração para cada unidade geradora do sistema para o dia que antecede a operação em tempo real (em intervalos de uma hora). Como se trata de uma etapa mais próxima da operação, um maior grau de detalhamento da modelagem matemática é requerido, levando em consideração, por exemplo, as restrições operativas da rede elétrica e, por outro lado, desconsiderando as incertezas relativas às vazões afluentes. Atualmente, o ONS não dispõe de um modelo computacional para alocação dos recursos de geração de forma global (ONS, 2011a), a exemplo das outras etapas. Nesse sentido, diversos trabalhos têm sido desenvolvidos visando melhorias metodológicas a essa etapa da cadeia (BELLONI *et al.*, 2003; FINARDI, 2003; FINARDI *et al.*, 2005; FINARDI e DA SILVA, 2006; RODRIGUES *et al.*, 2006; TAKIGAWA, 2006; DINIZ, 2007; DINIZ *et al.*, 2007; TAKIGAWA *et al.*, 2008; FINARDI e SCUZZIATO, 2011).

Tendo em vista a importância dos modelos computacionais na cadeia de modelos na operação do SIN, este trabalho tem como foco estudar os aspectos metodológicos associados particularmente ao PMO. Detalhes são apresentados nas seções seguintes deste capítulo e ao longo de todo o documento.

## 1.2 RELEVÂNCIA DO TRABALHO

Conforme introduzido na Seção 1.1, o problema do PMO consiste em estabelecer os níveis semanais de geração de cada usina do sistema de forma a atender a demanda e as demais restrições do problema com o mínimo custo esperado de operação ao longo do horizonte de estudo, atualmente igual a dois meses. Além das estratégias de geração das

usinas, os intercâmbios entre sistemas e os respectivos CMOs são também importantes resultados do PMO.

É com base nos CMOs que o preço da energia elétrica denominado de Preço de Liquidação das Diferenças - PLD é estabelecido. O PLD é, portanto, utilizado para valorar a compra e venda de energia no processo de liquidação da Câmara de Comercialização de Energia Elétrica - CCEE, ou seja, no mercado de curto prazo.

Logo, a credibilidade dos resultados do modelo computacional utilizado nessa etapa da cadeia é importante, uma vez que traz impactos econômicos aos agentes de mercado.

Nesse contexto, considerando que o modelo atualmente em uso vem sendo constantemente aperfeiçoado e que as características associadas aos estudos efetuados no PMO representam umas das possibilidades de abordar o problema no horizonte mensal, percebe-se que há espaço para melhorias e novas contribuições, tal como é o propósito deste trabalho.

O problema do PMO é particularmente difícil de ser solucionado, uma vez que seu tamanho cresce consideravelmente com a modelagem das características físicas do sistema, com o número de estágios e, ainda, em decorrência do aumento da representação das incertezas (variáveis aleatórias).

Com base na Figura 2, é fácil perceber que o PMO busca equilibrar a representação das incertezas e a modelagem das propriedades operativas do problema; isto é, utiliza uma melhor representação das incertezas em relação à PDE, porém com uma representação mais precisa dos aspectos físicos do sistema quando comparado com o PEN. Isso se torna possível em função do horizonte de estudo do PMO. Todavia, algumas simplificações ainda são introduzidas no modelo com o objetivo de viabilizar a solução em um tempo computacional aceitável. Nesse contexto, destaca-se a representação linear por partes da Função de Produção das Usinas Hidrelétricas - FPH (CUNHA *et al.*, 1997) e dos custos de produção das usinas termelétricas que apresentam, em sua essência, não linearidades (WOOD e WOLLENBERG, 1996).

Na literatura, diferentes alternativas são utilizadas para solucionar problemas dessa natureza. Em alguns casos, é possível resolvê-los sem a necessidade do uso de técnicas de decomposição, por meio de pacotes comerciais de otimização. Esses *softwares* comerciais podem resolver problemas com milhões de variáveis e restrições, ainda que requeiram um tempo computacional elevado. A fim de propiciar um melhor desempenho computacional, as técnicas de decomposição são

frequentemente utilizadas, com destaque para aquelas baseadas no princípio de Decomposição de Benders - DB (BENDERS, 1962).

A ideia dos métodos baseados na DB consiste em decompor o problema original em subproblemas menores, mais simples de serem resolvidos, em um tempo computacional reduzido. Cada um dos subproblemas resultante é linear e a comunicação entre eles é feita por meio de restrições de otimalidade construídas iterativamente. Algumas desvantagens são frequentemente destacadas para essa classe de métodos, como, por exemplo, a dificuldade de prover melhorias à qualidade da solução quando próxima da convergência. Atualmente no Brasil, a Decomposição Aninhada - DA (BIRGE e LOUVEAUX, 1997), que é um método baseado na DB, é utilizada na solução do problema do PMO.

Nas décadas recentes, avanços na teoria de Programação Estocástica - PE têm possibilitado o desenvolvimento de outros métodos com características distintas daqueles baseados na DB, os quais têm sido utilizados com sucesso na resolução de problemas de programação matemática de grande porte, incluindo os métodos baseados no Lagrangeano Aumentado - LA (RUSZCZYŃSKI, 1992). De forma resumida, os algoritmos baseado no LA "transferem" algumas restrições para a função objetivo e, assim permitem obter um conjunto de subproblemas quadráticos independentes, os quais são interconectados por restrições simples. Nessa classe de métodos, algumas desvantagens frequentemente apresentadas para os métodos baseados na DB podem ser mitigadas, uma vez que os subproblemas resultantes são quadráticos e também possibilita a aplicação de técnicas de partida quente com maior facilidade (RUSZCZYNSKI e SWIETANOWSKI, 1997). Por outro lado, suas principais desvantagens estão associadas às heurísticas que devem ser inevitavelmente utilizadas e são determinantes para o sucesso dos mesmos.

Um exemplo de um método baseado no LA que tem apresentado bons resultados quando aplicado na solução de problemas estocásticos de difícil solução é o Progressive Hedging - PH (ROCKAFELLAR e WETS, 1991). Apesar de ser comumente utilizado em problemas de outras áreas de conhecimento, como o mercado financeiro (MULVEY e VLADIMIROU, 1991) e fluxo de redes (WATSON e WOODRUFF, 2010), não existem muitas aplicações na área de despacho hidrotérmico (SANTOS *et al.*, 2009; GONÇALVES *et al.*, 2011b). Nesse contexto, o método de PH pode ser um método alternativo à DA quando aplicado à solução do problema do PMO.

Com base nesses aspectos e também na relevância apresentada sobre o tema, entre as principais contribuições deste trabalho é possível citar a investigação do desempenho do método de PH e o estudo detalhado das particularidades do algoritmo (diferentes estratégias de decomposição, métodos heurísticos para atualização dos parâmetros internos do algoritmo e o critério de convergência do método, entre outros) quando aplicado na solução de um problema real e de grande porte, o problema do PMO.

Além disso, um estudo comparativo entre o método de PH e a DA também compõe o escopo deste trabalho. Nesse contexto, destaca-se a análise do comportamento de ambos os métodos quando diferentes horizontes de planejamento e árvores de cenários com distintas complexidades são utilizadas (maior número de cenários em relação ao modelo atualmente utilizado, por exemplo).

Na seção a seguir, os objetivos gerais e específicos são apresentados de forma detalhada, bem como os aspectos associados ao modelo desenvolvido no âmbito deste estudo.

## 1.3 OBJETIVOS

O nível de desenvolvimento metodológico atual do PMO, a importância do tema para o planejamento da operação energética no Brasil e uma breve ideia sobre o estado da arte de métodos de PE foram apresentados na Seção 1.2. De acordo com esses aspectos, nesta seção são descritos os objetivos gerais e específicos deste trabalho.

### 1.3.1 Objetivos Gerais

No âmbito geral, neste trabalho tem-se o propósito realizar o desenvolvimento de modelos computacionais que propiciem uma análise detalhada do desempenho de duas metodologias de PE com características distintas, o método de PH e a DA, quando aplicadas na solução do problema do PMO.

Para tanto, o SIN é utilizado como plataforma de estudo. Nesse sentido, convém ressaltar que os modelos computacionais desenvolvidos têm também o intuito de permitir uma "reprodução" do modelo DECOMP, considerando as mais importantes características operativas

representadas no modelo atual<sup>1</sup>, com o propósito de balizar os resultados de ambos os métodos.

Dessa forma, o estudo visa apresentar contribuições para o desenvolvimento metodológico dos modelos computacionais utilizados no PMO, sobretudo, no que diz respeito ao modelo estocástico utilizado no horizonte atual (a representação das incertezas, a construção da árvore de cenários e o horizonte de estudo), bem como em relação ao uso de métodos alternativos de PE na solução do problema.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

De forma detalhada, o escopo principal deste trabalho diz respeito ao uso do método de PH quando aplicado na solução de problemas de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos. A ideia consiste em estudar o algoritmo do método de PH conjuntamente com as características do problema de interesse, com o intuito de analisar diferentes estratégias de decomposição. Desse modo, é possível obter problemas duais de tamanhos distintos de um mesmo problema primal, fato pouco abordado na literatura. Esse estudo pode prover melhorias significativas ao desempenho computacional do método uma vez que a etapa de resolução do problema dual tem um impacto considerável no tempo total de processamento do método de PH.

Ainda com relação do método de PH, destaca-se também o aperfeiçoamento de heurísticas inerentes ao método, a avaliação da qualidade da solução, o estudo de um critério de convergência para o algoritmo e o uso de técnicas de partida quente.

Ademais, os resultados do método de PH são comparados com aqueles resultantes da DA, utilizando os modelos desenvolvidos neste trabalho, a fim de elucidar as vantagens/desvantagens de ambos os métodos de decomposição, algumas apresentadas na literatura (BIRGE e LOUVEAUX, 1997; WATSON e WOODRUFF, 2010).

A discussão dos resultados é baseada no problema do PMO aplicado ao SIN. O estudo de casos visa observar importantes aspectos

---

<sup>1</sup> Como serão mostradas adiante no documento, algumas características não foram contempladas nos modelos desenvolvidos, tais como: contratos de importação e exportação; irrigação, tratamento de bacias especiais, restrições hidráulicas especiais, entre outras. Além disso, é conveniente comentar que a "reprodução" do modelo DECOMP foi baseada unicamente no manual de referência do mesmo (CEPEL, 2010b), no qual não estão detalhadas as minúcias envolvidas no desenvolvimento do modelo, como por exemplo, detalhes com relação aos cálculos ao acoplamento com o NEWAVE, entre outros.

do problema, como, por exemplo, a representação das incertezas associadas às vazões afluentes aos reservatórios do sistema (análises com relação ao número de realizações por estágio, inclusive considerando incertezas já nas semanas iniciais do primeiro mês de estudo, bem como a extensão do horizonte de planejamento), a modelagem da função de produção das usinas hidrelétricas (o número "satisfatório" de aproximações lineares por partes) e o mês de acoplamento com o outro modelo da cadeia (por meio de uma função de custo futuro que valora o uso futuro da água armazenada nos reservatórios do sistema).

No que diz respeito ao desenvolvimento dos modelos computacionais, destaca-se a implementação dos algoritmos seriais e paralelos (alto desempenho), de modo a observar os ganhos associados ao tempo de processamento computacional de ambos os métodos. Convém comentar ressaltar a utilização da linguagem de programação C++ com estrutura de classes (STROUSTRUP, 1997). Esse fato proporciona a reutilização da ferramenta computacional desenvolvida, além de facilitar alterações futuras e/ou melhorias a serem incorporadas ao modelo.

Na sequência do documento, alguns fatores aqui introduzidos são mais bem explorados, evidenciando com mais clareza os objetivos e contribuições deste trabalho de doutorado. Na seção a seguir, uma revisão bibliográfica sobre o estado da arte do problema foco também auxilia nesse sentido.

## 1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Conforme introduzido nas seções anteriores, os problemas associados ao planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos apresentam algumas características que os tornam problemas de programação matemática de difícil solução. Esse fato pode ser atribuído principalmente às incertezas do problema, em especial, às vazões afluentes, bem como a modelagem das características operativas do sistema.

Na literatura existem inúmeros trabalhos com foco em problemas de planejamento da operação aplicados aos diversos tipos de sistemas (hidrotérmicos, termelétricos, eólicos, entre outros), os quais abordam diferentes características do problema e estratégias de solução considerando também distintos horizontes de estudo (WATCHORN, 1967; CEPEL/ELETOBRÁS, 1977; PEREIRA e PINTO, 1984;

ARARIPE NETO *et al.*, 1985; PEREIRA e PINTO, 1985; TERRY *et al.*, 1986; SHERKAT *et al.*, 1988; PEREIRA, 1989; CONTAXIS e KAVATZA, 1990; CHRISTOFORIDIS *et al.*, 1996; MORTON, 1996; MEDINA *et al.*, 1998; ESCUDERO *et al.*, 1999; ENAMORADO *et al.*, 2000; ESCUDERO, 2000; FUENTES-LOYOLA *et al.*, 2000; FUENTES-LOYOLA e QUINTANA, 2002; MACEIRA *et al.*, 2003; MARTINEZ e SOARES, 2004b; MD SAYEED, 2004; CABERO *et al.*, 2005; DA COSTA *et al.*, 2006; FINARDI e DA SILVA, 2006; RODRIGUES *et al.*, 2006; ZAMBELLI *et al.*, 2006; MATOS *et al.*, 2008; SANTOS *et al.*, 2008; DIAS *et al.*, 2010). Contudo, dado que o foco deste trabalho consiste em estudar o desempenho de métodos de PE aplicados à solução do problema de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos, somente trabalhos relacionados com a PE serão discutidos nesta seção.

Diante deste fato, um dos primeiros trabalhos associados à decomposição de problemas estocásticos foi publicado por Van Slyke e Wets (1969). Os autores apresentaram o método *L-shaped*, o qual está relacionado a problemas de dois estágios e faz uso do Princípio de DB (BENDERS, 1962). Alguns anos depois, uma extensão do método *L-shaped* para problemas multistágio foi apresentada por Birge (1985), chamada de DA.

Rockafellar e Wets (1991) detalharam, pela primeira vez, o algoritmo do método de PH, que é baseado no LA e tem propriedades distintas dos baseados na DB.

Alguns autores destacam as características promissoras dos métodos baseados no LA quando aplicados a problemas estocásticos de grande porte, como abordado por Rosa e Ruszczyński (1996). Uma breve comparação entre distintas maneiras de decompor um problema estocástico original via o LA foi apresentada nesse mesmo artigo.

As diferentes classes de métodos são abordadas por Ruszczyński (1997), ressaltando as vantagens e desvantagens dos métodos de decomposição.

Adicionalmente, nas últimas décadas, importantes trabalhos foram também publicados no que diz respeito à PE, com destaque para as diferentes classes de métodos e suas particularidades, além das consequências advindas da representação das incertezas associadas aos problemas em estudo (RUSZCZYŃSKI, 1992; BIRGE e LOUVEAUX, 1997; DUPAČOVÁ *et al.*, 2000; LAU e WOMERSLEY, 2001; WETS, 2002; FOURER e LOPES, 2006; SHAPIRO e PHILPOTT, 2007; SHERALI e LIM, 2007).



Ainda no tocante às características relacionadas com a PE, há na literatura trabalhos cujo foco consiste em apresentar estratégias computacionais avançadas para acelerar a convergência dos métodos. Ou seja, o uso de programação de alto desempenho que torna factível a resolução dos subproblemas resultantes dos métodos de decomposição de forma independente e rápida (programação paralela – um problema “mestre” e outros subproblemas). Em Nielsen e Zenios (1997), o objetivo do trabalho corresponde ao estudo de distintas maneiras de intercomunicar a resolução dos subproblemas nos algoritmos baseados na DB usando programação paralela. Os ganhos relacionados com o uso dessas técnicas são também avaliados.

Dempster e Thompson (1998) descrevem os métodos de PE (estado da arte dos “métodos *split*”), e, em seguida, destacam o algoritmo da DA em sua versão paralela (BIRGE *et al.*, 1996) (conceito de mestre e escravos) aplicada em problemas de despacho hidrotérmicos com um grande número de cenários e estágios. Os autores também comentam sobre o uso de artifícios que podem melhorar o desempenho do processo, como, por exemplo, utilizar processadores “escravos” para solucionar subproblemas relativos aos nós em um mesmo instante.

É conveniente salientar que a maioria das aplicações disponíveis sobre PE estão relacionadas com outras áreas de conhecimento (MULVEY e VLADIMIROU, 1991; WALLACE e HELGASON, 1991; ESCUDERO *et al.*, 1999; WATSON e WOODRUFF, 2010), com destaque para aquelas relacionadas com a área financeira (WALLACE e HELGASON, 1991; KOUWENBERG, 2001). Porém, existem trabalhos com foco em sistemas hidrotérmicos relacionados, particularmente, com a comercialização de energia, em que as incertezas estão associadas a fatores como a demanda, o preço da energia e também às vazões afluentes (GROWE-KUSKA *et al.*, 2003; YU e ULUCA, 2004; CENTENO *et al.*, 2007; DE LADURANTAYE *et al.*, 2009).

Um dos estudos pioneiros relacionados com a operação de sistemas hidrotérmicos por meio da utilização de técnicas de PE foi apresentado por Pereira e Pinto (1985). A estratégia de solução utilizada foi a DA, aplicada ao sistema elétrico brasileiro. Em virtude do grande porte do problema de interesse, Pereira (1989) propôs algumas simplificações à estratégia estudada anteriormente, a fim de viabilizar a solução do problema em um tempo computacional aceitável. O propósito foi amostrar algumas realizações do modelo estocástico original. Esse método ficou conhecido como Programação Dinâmica Dual Estocástica - PDDE.

Com base nesse estudo, importantes trabalhos foram desenvolvidos na sequência com foco em sistemas hidrotérmicos (GORENSTIN *et al.*, 1991; JACOBS *et al.*, 1995; MORTON, 1996; MARTINEZ e SOARES, 2004a; MATOS, 2008; MATOS *et al.*, 2008; DIAS *et al.*, 2010).

Morton (1996), por exemplo, reforça a importância da representação adequada da estocasticidade em problemas relacionados com o planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos, uma vez que representações determinísticas podem produzir resultados insatisfatórios. Assim, o autor propõe a aplicação da DA e uma série de artifícios matemáticos para melhorar o desempenho computacional na solução do problema do planejamento da programação da *Pacific Gas and Electric - PG&E company* (JACOBS *et al.*, 1995). Nesse contexto, destacam-se as técnicas de partida quente, as quais utilizam informações das soluções dos subproblemas anteriores ou são "construídas" inicialmente com o intuito de guiar as primeiras iterações do algoritmo. Ainda, ressaltou-se a utilização de aproximações *multicut* (compartilhamento de informações entre cenários distintos) para problemas com uma grande quantidade de cenários e os ganhos computacionais associados à essa abordagem.

Em Escudero *et al.* (1999) é apresentada a aplicação da programação paralela para métodos baseados no LA na solução de problemas relacionados com a operação de sistemas hidrotérmicos. Além de ressaltar a melhoria de desempenho do método em função do uso de técnicas de programação paralela, os autores destacam também a importância das heurísticas intrínsecas ao LA no desempenho do algoritmo.

O mesmo autor comenta em Escudero (2000) a importância de utilizar métodos de amostragem na construção da árvore de cenários, quando há um número elevado de realizações e, assim, representar, de forma coerente, o modelo estocástico estudado.

Em JHA *et al.* (2008), a Programação Dinâmica Estocástica - PDES é utilizada na solução do problema do planejamento de uma única usina hidrelétrica no Japão, tendo como propósito principal reduzir o vertimento na operação mesma. Nesse artigo, um modelo independente de afluentes é considerado na construção dos cenários do problema.

Estudos aplicados ao planejamento da operação de um sistema hidrotérmico teste (duas hidrelétricas e uma termelétrica) em base mensal é o propósito do trabalho desenvolvido por Nolde *et al.* (2008). Para tanto, a DA é utilizada. Nesse trabalho, além das vazões afluentes, a demanda também é modelada como variável aleatória do problema.

Nós últimos anos, outros trabalhos também foram desenvolvidos utilizando técnicas alternativas à DA (GONÇALVES, 2007; SANTOS *et al.*, 2008; SANTOS *et al.*, 2009; GONÇALVES *et al.*, 2011a; GONÇALVES *et al.*, 2011b; GONÇALVES *et al.*, 2011c).

Em Gonçalves (2007) foi efetuada uma análise comparativa entre a RL (LEMARÉCHAL, 2001) e a DA. No que concerne à RL, dois importantes detalhes do algoritmo adotados no referido trabalho devem ser destacados: (i) uma sub-rotina chamada *N1CV2 Code* (LEMARÉCHAL e SAGASTIZÁBAL, 2002) baseada no método de feixes (LEMARÉCHAL *et al.*, 1996) foi usada na etapa do algoritmo correspondente à resolução do problema dual; (ii) a etapa de recuperação primal não foi efetuada nesse trabalho. Assim, os resultados desse estudo comparativo foram favoráveis à DA quando aplicados em uma configuração reduzida do SIN, uma vez que apresentou um melhor desempenho computacional além de propiciar soluções primais de melhor qualidade. Ainda nesse estudo, foi observado que para problemas de tamanho moderado, o Equivalente Determinístico - ED de um problema estocástico pode ser uma excelente estratégia de solução.

Com base nesses resultados, Santos *et al.* (2009) propuseram o uso do método de PH, baseado no LA, comumente aplicado à problemas da programação diária da operação de sistemas hidrotérmicos (BATUT e RENAUD, 1992; AL-AGTASH, 2001), na solução do mesmo problema teste utilizado por Gonçalves (2007). Nesse caso, os resultados do método de PH são similares à DA, especialmente com uso de artifícios matemáticos que permitem melhorar o desempenho computacional do método, como é o caso de técnicas de partida quente.

Tais resultados incentivaram a realização de outros trabalhos desenvolvidos na sequência. Gonçalves *et al.* (2011c) apresentam uma análise comparativa entre o método de PH, a DA e o ED. Os resultados confirmaram que o uso do ED do problema estocástico é computacionalmente inviável quando aplicado à problema de grande porte. No que diz respeito às técnicas de decomposição, o método de PH apresentou resultados bastante competitivos em relação à DA. Nesse trabalho, a modelagem de outras características operativas utilizadas no PMO foi contemplada, como: patamares de carga, tempo de viagem da água entre reservatórios e a representação da FPHs por meio de uma função linear por partes.

Em Gonçalves *et al.* (2011a), particularidades do algoritmo do método de PH foram observadas na solução do PMO de todo o SIN. Destaca-se a análise de diferentes estratégias de decomposição e a

substituição de heurísticas clássicas de parâmetros do método de PH por outras mais efetivas.

## 1.5 CONTRIBUIÇÕES E ESTRUTURA DO TRABALHO

Os aspectos discutidos na Seção 1.4 ajudam a reforçar a relevância do tema e as melhorias que podem ser incorporadas ao modelo atualmente vigente no SEB, especialmente no que concerne o PMO. Por exemplo, é possível destacar os métodos baseados no LA, que na literatura tem apresentado resultados promissores quando aplicados na solução de problemas com características similares ao problema de interesse. Neste trabalho, destaca-se o estudo do método de PH e as principais características de seu algoritmo, bem como algumas peculiaridades associadas ao modelo DECOMP (árvore de cenários, função de produção das usinas, entre outros). Além disso, uma análise comparativa entre o método de PH e a DA é apresentada, observando não somente os aspectos computacionais, mas também as políticas de operação obtidas com ambos os métodos.

Com base nos comentários anteriores, o documento está organizado da seguinte maneira. No capítulo seguinte são discutidos aspectos introdutórios sobre PE. Inicialmente, o intuito é destacar a importância de otimizar sob incerteza com base em um exemplo numérico relacionado com a programação da operação de um sistema hidrotérmico simplificado. Em seguida, conceitos intrínsecos à PE e importantes para a melhor compreensão da sequência do trabalho são apresentados.

No Capítulo 3, as diferentes classes dos algoritmos de solução de problemas estocásticos são detalhadas, as quais remetem ao modo pelo qual as incertezas são representadas e, consequentemente, como o problema é solucionado. Nesse sentido, ambos os algoritmos estudados neste trabalho são descritos (DA e PH), com ênfase às particularidades do método de PH que constituem um dos principais objetivos desse trabalho.

A apresentação das características mais relevantes do modelo matemático utilizado na solução do problema do PMO constitui o propósito do Capítulo 4. Inicialmente, destacam-se aspectos relativos à FPH, seguidos de algumas considerações sobre o acoplamento com a primeira etapa da cadeia de modelos por meio da FCF, além de outras peculiaridades operativas. Ademais, a formulação de ambos os métodos de acordo com as características do PMO é detalhada.

No Capítulo 5, os resultados computacionais das metodologias propostas quando aplicado ao SIN são apresentados e discutidos. Antes da análise comparativa entre os dois métodos, aspectos metodológicos associados somente ao método de PH são destacados. A ideia consiste em mostrar os resultados para as distintas estratégias de decomposição e heurísticas baseadas em características do problema. Com base nos resultados prévios do método de PH, na sequência do capítulo, os resultados computacionais comparativos dos métodos são apresentados, no que diz respeito ao desempenho computacional e às políticas resultantes dos mesmos.

Por fim, as conclusões sobre o trabalho e as sugestões para trabalhos futuros são descritas no Capítulo 6.



## **CAPÍTULO 2**

### **PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA**

---

#### **2.1 INTRODUÇÃO**

Os problemas de programação matemática podem ser classificados de acordo com a natureza dos dados, os quais podem ser considerados determinísticos (todos os dados são conhecidos antes da otimização) ou estocásticos (a otimização contempla as incertezas intrínsecas aos dados do problema). Nesse sentido, alguns conceitos básicos sobre PE são abordados neste capítulo com o intuito de elucidar aspectos fundamentais no que diz respeito à representação das incertezas associadas aos dados do problema.

É fácil perceber que problemas de natureza determinística são mais simples de serem solucionados quando comparados com problemas estocásticos. No entanto, grande parte dos problemas de otimização apresentam incertezas em seus dados, conhecendo-se no máximo sua distribuição de probabilidade.

Desse modo, na teoria de PE, diversos aspectos são frequentemente abordados na literatura (SHAPIRO e PHILPOTT, 2007), tais como: a representação matemática das variáveis aleatórias no modelo; avaliação da qualidade da solução com base no conjunto de variáveis aleatórias; e os métodos de solução do problema. No contexto deste trabalho, as incertezas associadas às vazões afluentes aos reservatórios do sistema tornam o problema estocástico e, por esse

motivo, cabe aqui destacar alguns conceitos fundamentais relativos à teoria de PE. Adicionalmente, detalhes no que diz respeito à modelagem matemática de um problema de despacho hidrotérmico são também introduzidos neste capítulo.

## 2.2 SOLUÇÃO DETERMINÍSTICA *VERSUS* ESTOCÁSTICA

Considere um problema de planejamento da operação de um sistema hidrotérmico fictício composto por uma usina hidrelétrica e quatro termelétricas, conforme mostrado na Figura 3. O propósito é atender uma demanda,  $L_t$ , durante um período de dois meses, a qual é constante e igual a 450 MWmédio.

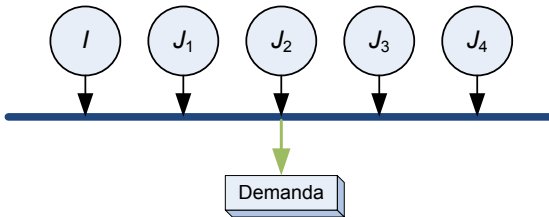


Figura 3. Configuração Hidrotérmica.

A usina hidrelétrica  $I$  tem capacidade ilimitada de geração e de armazenamento. Neste estudo, a produção da usina hidrelétrica é diretamente proporcional à vazão turbinada<sup>2</sup>. Assim, considerando a produtibilidade igual a 1 MWmédio/hm<sup>3</sup>, tem-se:

$$gh = 1q, \quad (1)$$

em que,

$$\begin{array}{ll} gh & \text{geração hidrelétrica (MWmédio);} \\ q & \text{vazão turbinada da usina (hm}^3\text{).} \end{array}$$

<sup>2</sup> Em sua essência, a geração de energia de uma usina hidrelétrica depende da vazão turbinada do conjunto ( $q$ ), da altura da queda líquida ( $hl$ ) e rendimento do grupo turbina-gerador ( $\eta$ ), ou seja,  $gh = 9,81 \cdot 10^3 \eta hlq$ . O rendimento do grupo turbina-gerador é modelado por uma função não linear dependente da queda líquida e da vazão turbinada na usina. Por sua vez, a altura de queda líquida corresponde à queda bruta (diferença entre os níveis de montante e jusante da usina e, portanto, também depende da vazão turbinada) subtraída das perdas hidráulicas (FINARDI *et al.*, 2005).



No que diz respeito às usinas termelétricas, na Tabela 1 estão apresentados todos os dados relevantes para o exemplo. Note que o déficit de energia é representado por meio da usina termelétrica  $J_4$  cuja capacidade de geração é igual à demanda do sistema teste,  $L_t$ . Neste ponto, é importante comentar que todos os limites mínimos das variáveis são considerados nulos e, ainda, que nenhuma restrição de armazenamento no último mês ou função de custo futuro é representada no problema.

**Tabela 1. Dados das usinas termelétricas.**

Usina	Custo Incremental da geração (R\$/MWMédio)	Geração Máxima (MWMédio)
$J_1$	10	10
$J_2$	25	30
$J_3$	75	60
$J_4$	200	450

Uma vez apresentada todas as características do sistema hidrotérmico em estudo, o passo seguinte corresponde a modelar o problema de acordo com suas peculiaridades operativas para o horizonte de dois meses. Para tanto, considere também que o volume inicial da usina hidrelétrica e volume afluyente para o primeiro mês são iguais a  $250 \text{ hm}^3$ . Para o segundo mês, a previsão indica um volume afluyente igual a  $300 \text{ hm}^3$ . Observe que, neste momento, a aflluência é considerada conhecida; ou seja, tem-se um problema determinístico.

Desse modo, o problema pode ser formulado como segue:

$$F = \min \quad 10gt_{11} + 25gt_{21} + 75gt_{31} + 200gt_{41} \\ + 10gt_{12} + 25gt_{22} + 75gt_{32} + 200gt_{42} \quad (2)$$

$$\text{s.a.: } gt_{11} + gt_{21} + gt_{31} + gt_{41} + q_1 = 450, \\ v_2 + q_1 = 250 + 250, \\ gt_{11} \leq 10, gt_{21} \leq 30, gt_{31} \leq 60, \\ gt_{12} + gt_{22} + gt_{32} + gt_{42} + q_2 = 450, \\ v_3 + q_2 - v_2 = 300, \\ gt_{12} \leq 10, gt_{22} \leq 30, gt_{32} \leq 60, \quad (3)$$

em que,

$gt_{jt}$  geração da  $j$ -ésima usina termelétrica no estágio  $t$  (MWmédio);  
 $v_t$  volume do reservatório no estágio  $t$  (hm<sup>3</sup>).

A solução ótima do problema (2)-(3) pode ser visualizada na Tabela 2.

**Tabela 2. Solução do problema (2)-(3).**

Estágio	$gt_1$	$gt_2$	$gt_3$	$gt_4$	$gh$	$v$
1	10	30	0	0	410	90
2	10	30	20	0	390	0
Custo Ótimo (R\$)				3.200		

Em virtude do acoplamento temporal entre as decisões<sup>3</sup>, é importante ressaltar que os resultados de primeiro estágio, apresentados na Tabela 2, são baseados na expectativa futura de volume afluyente de segundo estágio. Em outras palavras, a função objetivo do problema busca encontrar a solução de mínimo custo de operação para os dois estágios do horizonte de estudo em decorrência do valor previsto para volume afluyente no segundo estágio.

Assim, caso a previsão seja perfeita, a solução ótima do problema seria exatamente igual àquela apresentada na Tabela 2. No entanto, se a previsão falhar e um volume afluyente superior ao valor previsto para o segundo estágio ocorrer, a estratégia anteriormente definida para o primeiro estágio pode ser indesejável, em virtude do incremento de água no sistema. Por outro lado, se ocorrer um volume afluyente inferior ao previsto, o uso da geração termelétrica será mandatória a fim de atender à demanda do sistema, suprimindo a carência de geração hidrelétrica.

Com o intuito de obter uma decisão que leve em conta as incertezas da previsão, suponha, então, que existam três possibilidades de volumes afluentes futuros: (a) elevado, (b) médio e (c) baixo, conforme destacado na Figura 4. Numericamente, (a) corresponde a um volume afluyente igual a 500 hm<sup>3</sup>; (b) exatamente igual à previsão considerada, 300 hm<sup>3</sup> e; (c) um volume afluyente igual a 100 hm<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Em problemas da programação da operação de sistemas hidrotérmicos, a única variável de estado é, em geral, o volume, a qual acopla as decisões entre diferentes estágios de tempo, conforme apresentado em (2)-(3).

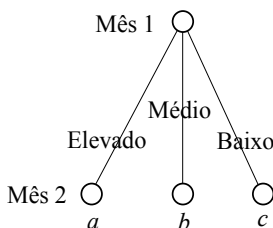


Figura 4. Possibilidades de volumes afluentes ao reservatório do sistema.

Desse modo, é possível avaliar se, de fato, a solução apresentada na Tabela 2 é sensível às incertezas relacionadas à previsão do volume afluente. As soluções do problema (2)-(3), para as duas novas possibilidades de volumes afluentes analisadas individualmente, podem ser visualizadas nas Tabelas 3 e 4.

**Tabela 3. Solução do problema (2)-(3) para volume afluente elevado.**

Estágio	$gt_1$	$gt_2$	$gt_3$	$gt_4$	$gh$	$v_2$
1	0	0	0	0	450	50
2	0	0	0	0	450	100
Custo Ótimo (R\$)				0		

**Tabela 4. Solução do problema (2)-(3) para volume afluente baixo.**

Estágio	$gt_1$	$gt_2$	$gt_3$	$gt_4$	$gh$	$v_2$
1	10	30	60	0	350	150
2	10	30	60	100	250	0
Custo Ótimo (R\$)				30.700		

Com base nos resultados, note que dependendo do volume afluente previsto para o segundo mês pode haver a necessidade de uso da usina termelétrica  $J_4$  (corresponde ao déficit de energia). Dito de outro modo, a consequência de estudar diferentes previsões pode ser observada no custo total de operação, o qual pode variar de R\$ 0,00 (elevado volume afluente) até R\$ 30.700,00 (baixo volume afluente).

Portanto, esses resultados indicam que, de alguma forma, é necessário representar as incertezas associadas aos volumes afluentes para mitigar os riscos associados aos erros de previsão, pois diferentes realizações da mesma variável aleatória do problema acarretam em distintas decisões. Nesse momento, contudo, não se sabe qual das três soluções é a melhor para o problema em questão; ou seja, qual

realização deve ser considerada pelo "decisor". Uma maneira de sobrepujar essa dificuldade consiste em minimizar o valor esperado do custo de operação sem possuir a informação perfeita sobre as ocorrências futuras.

Nesse contexto, é possível remodelar o problema considerando as três possíveis realizações de segundo estágio por meio do ED do problema de Programação Linear - PL estocástico, em que as realizações são denotadas pelos índices  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Assim como ilustrado na Figura 4,  $a$  representa a realização de maior volume afluente;  $b$  corresponde ao valor médio; e  $c$ , a realização de menor volume afluente. Supondo também que todas as realizações têm a mesma probabilidade de ocorrência, igual a  $1/3$ . Logo, o problema de PL pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 F = \min \quad & 10gt_{11} + 25gt_{21} + 75gt_{31} + 200gt_{41} \\
 & + \frac{1}{3}(10gt_{12}^a + 25gt_{22}^a + 75gt_{32}^a + 200gt_{42}^a) \\
 & + \frac{1}{3}(10gt_{12}^b + 25gt_{22}^b + 75gt_{32}^b + 200gt_{42}^b) \\
 & + \frac{1}{3}(10gt_{12}^c + 25gt_{22}^c + 75gt_{32}^c + 200gt_{42}^c)
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{s.a.: } & gt_{11} + gt_{21} + gt_{31} + gt_{41} + q_1 = 450, \\
 & v_2 + q_1 = 500, \\
 & gt_{11} \leq 10, gt_{21} \leq 30, gt_{31} \leq 60, \\
 & gt_{12}^a + gt_{22}^a + gt_{32}^a + gt_{42}^a + q_2^a = 450, \\
 & v_3^a + q_2^a - v_2 = 500, \\
 & gt_{12}^a \leq 10, gt_{22}^a \leq 30, gt_{32}^a \leq 60, \\
 & gt_{12}^b + gt_{22}^b + gt_{32}^b + gt_{42}^b + q_2^b = 450, \\
 & v_3^b + q_2^b - v_2 = 300, \\
 & gt_{12}^b \leq 10, gt_{22}^b \leq 30, gt_{32}^b \leq 60, \\
 & gt_{12}^c + gt_{22}^c + gt_{32}^c + gt_{42}^c + q_2^c = 450, \\
 & v_3^c + q_2^c - v_2 = 100, \\
 & gt_{12}^c \leq 10, gt_{22}^c \leq 30, gt_{32}^c \leq 60.
 \end{aligned} \tag{5}$$

O Problema (4)-(5) é conhecido como ED do problema estocástico em sua forma extensiva ou ainda chamado na literatura de Problema com Recurso - PR (*Recourse Problem*). Os problemas com recurso são aqueles em que as decisões são fixadas antes de se conhecer as ocorrências futuras. Logo, existe a possibilidade de utilizar as decisões futuras a fim de reduzir o impacto das decisões fixadas previamente; ou seja, há um recurso para "recompor" as decisões iniciais.

Na formulação do problema (4)-(5), note que todas as possibilidades de ocorrências futuras apresentadas na Figura 4 são modeladas concomitantemente na formulação do problema. Assim, os resultados do ED estão mostrados na Tabela 5.

**Tabela 5. Solução do problema (4)-(5).**

Estágio	$gt_1$	$gt_2$	$gt_3$	$gt_4$	$gh$	$v$	
1	10	30	20	0	390	110	
<i>a</i>	0	0	0	0	450	160	
2	<i>b</i>	10	30	0	0	410	0
<i>c</i>	10	30	60	140	210	0	
Custo Ótimo (R\$)			13.750				

De acordo com os resultados das variáveis primais de segundo estágio destacadas na Tabela 5, vale ressaltar que, quando são consideradas incertezas no problema, é impossível encontrar uma solução que seja ótima considerando todas as circunstâncias futuras. Consequentemente, utilizar a geração hidrelétrica em abundância na operação do sistema em cenários hidrológicos não favoráveis pode acarretar em custos dispendiosos com geração termelétrica no estágio seguinte. Desse modo, a formulação (4)-(5) procura encontrar uma solução ponderada pela probabilidade de ocorrência de cada realização, levando em conta o impacto de cada uma delas na solução final do problema.

Nos estudos de PE, a solução do problema (4)-(5) tem relevância considerável. Para exemplificar, imagine que, mantidas as condições iniciais do problema, somente haja a perspectiva de ocorrência futura das três realizações destacadas na Figura 4. É como se o problema fosse solucionado infinitas vezes considerando as três possibilidades de volumes afluentes individualmente (elevado, médio, baixo, baixo, elevado, médio, médio, baixo, elevado e, assim, sucessivamente), com

mesma probabilidade de ocorrência, e mantendo as mesmas condições iniciais do problema.

Diante de tais considerações, as soluções possíveis para o problema seriam iguais àquelas apresentadas nas Tabelas 2, 3 e 4. Com relação ao custo de operação do sistema, os valores seriam os seguintes: R\$ 0,00 considerando a condição de elevado volume afluyente; R\$ 3.200,00 correspondente ao cenário com volume afluyente médio e, ainda, R\$ 30.700,00 quando ocorrer baixo volume afluyente.

Nesse sentido, o custo médio de operação do sistema, considerando que as realizações possuem, de fato, a mesma probabilidade, seria igual a R\$ 11.300,00 (média ponderada entre R\$ 0,0, R\$ 3.200,00 e R\$ 30.700,00). De acordo com a teoria de PE, isso corresponde a decidir sob informação perfeita com relação às ocorrências futuras. Esse valor é, em geral, diferente da solução do ED que, nesse caso, é igual a R\$ 13.750,00.

Neste ponto, é interessante contextualizar essa análise numérica de acordo com os conceitos de otimização estocástica.

A abordagem apresentada acima, a qual resulta em R\$ 11.300,00, pode ser interpretada como uma forma alternativa de reduzir o impacto de considerar o problema como sendo determinístico; ou melhor, com uma única possibilidade de ocorrência futura. O enfoque consiste em decidir para cada um dos possíveis cenários individualmente e, por conseguinte, avaliar o impacto dessas decisões particulares. No caso em questão, se cada uma das três possibilidades de realizações ocorrerem com a mesma probabilidade, o valor esperado seria realmente igual a R\$ 11.300,00. Na literatura, essa aproximação é conhecida como a solução *Wait-and-See* – WS (espere e veja) (GREENGARD e RUSZCZYNSKI, 2002).

Outro importante conceito é o Valor Esperado da Informação Perfeita - VEIP (do inglês *Expected Value of Perfect Information*). O intuito consiste em comparar o valor do ED com a solução WS, conforme definido abaixo:

$$\text{VEIP} = \text{ED} - \text{WS}. \quad (6)$$

Para o exemplo proposto, o VEIP é igual a R\$ 2.450,00. A interpretação desse resultado pode ser a seguinte: valor que o “decisor” estaria disposto a pagar para obter a informação perfeita das ocorrências futuras.

Outra simplificação comumente utilizada para resolver problemas com incertezas consiste em utilizar o valor médio das todas as

realizações em cada um dos estágios do horizonte de estudo. O problema determinístico resultante dessa aproximação é chamado de Problema do Valor Esperado - PVE (*Expected Value Problem*) ou Problema do Valor Médio (*Mean Value Problem*). Isso permite ao operador/decisor obter uma solução aproximada, sem a necessidade de considerar todas as realizações previstas inicialmente. Se a quantidade de realizações é consideravelmente grande, a aproximação WS pode, por exemplo, requerer um tempo computacional adicional para que sejam solucionados os problemas relativos a cada uma das realizações.

No caso do sistema teste estudado, a solução do PVE é igual àquela apresentada na Tabela 2, uma vez que a média das variáveis aleatórias corresponde coincidentemente ao volume afluente de 300 hm<sup>3</sup> utilizado na solução do problema (2)-(3). Conforme comentado anteriormente, soluções similares ao PVE podem ser insatisfatórias, por não apresentarem proteções contra cenários secos ou úmidos, acarretando no uso de recursos mais caros ou no "desperdício" de água no sistema.

Portanto, com o intuito de analisar a qualidade da solução do PVE, é necessário substituir a solução ótima do problema apresentada Tabela 2 (particularmente associado ao volume final do estágio 1), na formulação do problema (4)-(5) e, assim, observar o impacto dessa decisão no custo esperado de operação do problema. Isso pode ser definido como sendo o Resultado Esperado do Problema do Valor Esperado - REPVE, que, no caso de uma solução inviável, assume-se um valor infinito. Vale destacar que esse valor é, em geral, diferente da solução do PVE (igual à R\$ 3.200,00).

O REPVE estima o resultado da solução do PVE quando aplicada ao modelo estocástico. Com base nesse valor, outro importante conceito pode ser definido: o Valor da Solução Estocástica - VSE (do inglês, *Value of Stochastic Solution*). Assim, é possível avaliar o ganho de uma modelagem estocástica quando comparada com uma modelagem baseada na média das realizações, como é o caso PVE. O VSE pode ser definido matematicamente da seguinte maneira:

$$\text{VSE} = \text{REPVE} - \text{ED}. \quad (7)$$

O VSE do problema teste é aproximadamente igual a R\$ 333,33. Em resumo, esse valor pode ser interpretado como sendo custo adicional pago pelo "decisor" quando as incertezas associadas ao problema são desprezadas. Nesse caso, a média das variáveis aleatórias foi

considerada, resultando em um único problema de programação linear a ser solucionado (realização média).

Convém enfatizar que a literatura recomenda a utilização da programação estocástica especialmente nos casos em que os valores de VEIP e VSE são elevados. Nesse caso em particular, o VEIP corresponde a aproximadamente 18% do custo esperado de operação resultante do ED. Por sua vez, o VSE representa apenas 2,5% do custo de operação esperado do sistema teste. Embora o VSE não seja tão elevado, o exemplo cumpriu com o objetivo inicial de introduzir conceitos importantes sobre PE e ainda exalta o uso dessa abordagem. Além disso, o exemplo serviu para inserir o problema do planejamento da operação no contexto da programação estocástica, bem como suas particularidades operativas.

Obviamente que, na prática, os problemas apresentam um maior número de variáveis e restrições quando comparado com o exemplo aqui proposto e, portanto, análises similares no contexto da PE em um problema de grande porte tornam-se bastante complicadas.

As discussões apresentadas nesta seção podem ser usadas para justificar e motivar os estudos relacionados com PE, lembrando que existe uma forte sensibilidade dos resultados ao conjunto de possíveis realizações utilizadas em problemas dessa natureza.

## 2.3 ASPECTOS DE MODELAGEM E INCERTEZAS

Conforme mencionado no início deste capítulo, as incertezas em PE podem ser modeladas por meio de um conjunto de prováveis realizações baseadas em uma distribuição de probabilidade. Cada realização  $\omega$  é composta por variáveis aleatórias e o conjunto dessas variáveis aleatórias é representado, neste trabalho, por  $\xi$ .

Em PE, uma vez definido o conjunto de variáveis aleatórias para o problema de interesse, as decisões são sempre sequenciais. No caso do exemplo detalhado na subseção anterior, as variáveis de primeiro estágio  $x_1$  são inicialmente decididas, as quais estão associadas a variável de volume  $v$  (única variável de estado do problema), para, na sequência, obter as decisões corretivas de segundo estágio que minimizem o custo de operação do sistema com base na decisão de primeiro estágio, levando em conta todas as possíveis realizações  $\omega$  do conjunto de variáveis aleatórias  $\xi$ . De uma maneira geral, imagine que  $x_1$  corresponde as variáveis de primeiro estágio e  $x_2$  são relativas àquelas



decisões de segundo estágio. A ideia de problemas de PE com recurso é, portanto, ilustrada pela Figura 5.

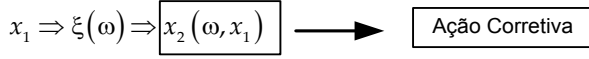


Figura 5. Sequência de decisões.

Desse modo, um problema de PE é dito de recurso completo se for sempre possível minimizar o impacto de decisões "equivocadas" de primeiro estágio por meio de ações corretivas de segundo estágio, como é o caso de problemas de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos. Existem também problemas de PE com recurso relativamente completo, além de outras classes de problemas estocásticos, como detalhado por Birge e Loiveaux (1997).

### 2.3.1 Formulação de Problemas Estocásticos

Em termos de programação matemática, a formulação clássica de um problema de programação linear estocástico de dois estágios ou o ED de um problema estocástico de dois estágios, pode ser definida da seguinte forma:

$$z(x_1, \xi) = \min c_1^T x_1 + E \left[ \min (c_2^\omega)^T x_2^\omega \right], \quad (8)$$

$$\text{s.a: } A_1 x_1 = b_1,$$

$$A_2^\omega x_2^\omega + B_2^\omega x_1 = b_2^\omega, \quad (9)$$

$$x_1 \geq 0, x_2^\omega \geq 0,$$

em que,

- $z(.)$  valor da função objetivo;
- $c_t$  vetor de custos relativos ao estágio  $t$ , em que,  $t=1,2$ ;
- $x_t$  vetor de decisões referentes ao estágio  $t$ , tal que  $x \in \mathfrak{R}^n$ ;
- $\Omega_t$  conjunto de realizações em um determinado estágio  $t$ ;
- $\omega_t$  realização em um determinado estágio  $t$ , tal que,  $\omega_t \in \Omega_t$ ;
- $A_t^\omega$  matriz de coeficientes das restrições de dimensão  $m_1 \times n$  para cada realização  $\omega$  no estágio  $t$ ;

- $B_t^\omega$  matriz de acoplamento ou matriz recurso com dimensão  $m_t$  x  $n_t$  para cada realização  $\omega$  no estágio  $t$ ;  
 $b_t^\omega$  vetor independente para cada realização  $\omega$  no estágio  $t$ .

De acordo com (8)-(9), note que as incertezas podem estar relacionadas às matrizes  $A$  e  $B$ , bem como ao vetor independente  $b$  do problema. Entretanto, nos problemas da vida real, a aleatoriedade está mais comumente associada ao vetor  $b$ , como é o caso do problema de interesse deste trabalho, onde as vazões afluentes aos reservatórios do sistema são as únicas incertezas do problema e correspondem exatamente a esse vetor.

Resolver problemas de PE (8)-(9) numericamente exige a consideração de algumas premissas, pois encontrar o valor esperado das decisões de segundo estágio requer a resolução de uma integral uma vez que as variáveis aleatórias são contínuas. Para viabilizar sua solução, deve-se, portanto, assumir que o vetor de variáveis aleatórias  $\xi$  tem um número finito de realizações com probabilidades associadas a cada uma delas. Desse modo, é possível calcular o valor esperado das decisões de segundo estágio para uma distribuição de probabilidade discreta com base em suas realizações, da seguinte forma:

$$E \left[ \min (c_2^\omega)^T x_2^\omega \right] = \sum_{\omega \in \Omega_2} p_2^\omega (c_2^\omega)^T x_2^\omega, \quad (10)$$

em que,

- $p_2^\omega$  probabilidade associada a uma determinada realização  $\omega$  no estágio 2. No caso de problemas multistágios, é possível associar a probabilidade ao conjunto de realizações.

Logo, reescrevendo o problema (8)-(9) para uma distribuição de probabilidade discreta e também considerando somente o vetor independente  $b$  como fonte de incerteza, tem-se:

$$z(x_1, \xi) = \min c_1^T x_1 + \sum_{\omega \in \Omega_2} p_2^\omega c_2^T x_2^\omega \quad (11)$$

$$\text{s.a: } A_1 x_1 = b_1,$$

$$A_2 x_2^\omega + B_2 x_1 = b_2^\omega \quad (12)$$

$$x_1 \geq 0, x_2^\omega \geq 0.$$

Vale reforçar que as realizações  $\omega$  somente estão associadas ao segundo estágio. É padrão na literatura de PE considerar que não existem incertezas relacionadas com o primeiro estágio, uma vez que a decisão deve ser única no ato em que a mesma é tomada.

De maneira resumida, a função objetivo (11) visa minimizar o custo para um horizonte igual a dois estágios, composto pelas decisões de primeiro estágio  $x_1$  e do valor esperado das decisões de segundo estágio em consequência da decisão prévias de primeiro estágio. As demais equações ou inequações correspondem às restrições do problema para ambos os estágios, os quais estão interconectados pela Matriz de Acoplamento ou Matriz Tecnologia  $B_2$ .

Fazendo uma analogia com o exemplo apresentado anteriormente, a função objetivo pode ser descrita como o custo de operação do sistema hidrotérmico e as equações estão relacionadas às restrições de atendimento à demanda e às restrições de conservação da massa d'água.

Uma vez apresentada a modelagem clássica do problema estocástico de dois estágios, é possível reescrever cada uma das aproximações abordadas na Seção 2.2. Por exemplo, a solução do ED por ser escrita da seguinte forma:

$$ED = \min_{x_1} E[z(x_1, \xi)]. \quad (13)$$

Adicionalmente, a solução do WS pode ser representada como a seguir:

$$WS = E \left[ \min_{x_1} z(x_1, \xi) \right]. \quad (14)$$

No que diz respeito ao PVE, o qual considera o valor esperado das variáveis aleatórias, é possível defini-lo do seguinte modo:

$$PVE = \min_{x_1} z(x_1, \bar{\xi}), \quad (15)$$

em que,

$\bar{\xi}$  valor esperado das variáveis aleatórias,  $\xi$ .

Por fim, o resultado esperado para o problema em decorrência do uso da solução do PVE no ED, definido como REPEV, pode ser escrito como segue:

$$\text{REPEV} = E \left[ z(x_1^*(\bar{\xi}), \xi) \right]. \quad (16)$$

As equações (13)-(16) complementam, portanto, as discussões apresentadas na Seção 2.2.

### 2.3.2 Representação das Incertezas

As incertezas associadas aos problemas de PE considerando uma distribuição de probabilidade discreta são, em geral, ilustradas graficamente por meio de uma árvore de cenários, como apresentado na seção anterior. Então, para um conjunto  $\Omega_2$  de possíveis realizações de segundo estágio, a árvore de cenários pode ser genericamente representada conforme a Figura 6.

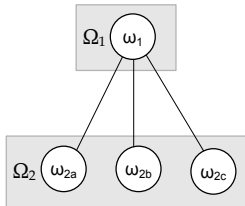


Figura 6. Árvore de cenários considerando três realizações de segundo estágio.

A representação dessas incertezas por meio de grafos tem o intuito de descrever o conjunto de realizações do problema em cada estágio. Assim, a cada nó está associado a uma realização específica. Por sua vez, um conjunto de realizações ou sequência de nós desde o estágio inicial até o estágio final, com uma única realização em cada estágio, pode ser definido como um cenário  $s$ . Nesse caso, por exemplo, o cenário 1 é formado pelas realizações  $\omega_1$  e  $\omega_{2a}$ .

De acordo com a Figura 6, é fácil perceber que todos os cenários compartilham as mesmas decisões de primeiro estágio, tendo em vista que o conjunto  $\Omega_1$  de variáveis aleatórias é idêntico em todos eles. Nesse sentido, é possível definir um importante conceito em PE: a condição de não-antecipatividade (ROCKAFELLAR e WETS, 1991). A ideia

consiste em decidir no momento presente levando em conta todas as possíveis realizações futuras. Ou seja, tendo em vista que a decisão deve ser tomada em um momento presente, sem ser possível antecipar qual realização futura irá realmente acontecer, a decisão deve ser única em todos os cenários que passam pelo mesmo nó ou que compartilham as mesmas realizações.

Em (11)-(12), as restrições de não-antecipatividade, as quais podem ser também associadas à Figura 6, foram modeladas na sua forma implícita (FOURER e LOPES, 2006); isto é, as decisões do estágio 1 correspondem a um único vetor de decisões  $x_1$ .

Entretanto, existe a possibilidade de modelar a não-antecipatividade em sua forma explícita, que é mais comumente associada à outra representação da árvore de cenários, como mostrado na Figura 7.

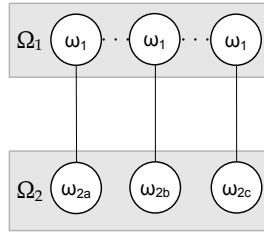


Figura 7. Outra maneira de representa a árvore de cenários da Figura 6, onde a não-antecipatividade está representada em sua forma explícita.

Assim, o problema (11)-(12) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$f = \min \sum_{s=1}^S p^s (c_1^s x_1^s + c_2^s x_2^s), \quad (17)$$

$$\text{s.a: } A_1^s x_1^s = b_1^s,$$

$$A_2^s x_2^s + B_2^s x_1^s = b_2^s,$$

$$x_1^s - x_1^{\bar{s}} = 0, \forall \bar{s} \in \Psi_1^s,$$

$$x_1^s \geq 0, x_2^s \geq 0,$$

(18)

em que,

- $S$  representa o número total de cenários;
- $s$  índice associado aos cenários, tal que  $s=1, \dots, S$ .

- $\Psi_1^s$  conjunto de cenários que compartilham as mesmas decisões no estágio 1;
- $\bar{s}$  cenário que pertence ao conjunto  $\Psi_1^s$ .

Note que, diferentemente de (11)-(12), as restrições de não-antecipatividade estão descritas em sua maneira explícita, as quais asseguram uma única decisão de primeiro estágio em todos os cenários  $s$ . Com base nesses aspectos apresentados, existem, portanto, duas possibilidades para escrever o ED de um problema estocástico: (i) a forma implícita e (ii) a forma explícita (FOURER e LOPES, 2006). A diferença básica é como as restrições de não-antecipatividade são manipuladas. A modelagem por meio do ED explícito possui um número maior de variáveis e restrições quando comparado com o ED implícito.

### 2.3.3 Estrutura de Dados

Com o propósito de prover uma melhor compreensão dos algoritmos de solução detalhados no Capítulo 3, nesta subseção são demonstrados os principais aspectos que envolvem a estrutura de dados de problemas de PE. Nesse contexto, o problema (11)-(12), o qual representa a não-antecipatividade em sua forma implícita, pode ser representado matricialmente conforme Figura 8.

$c_1$	$p_2^{\omega_{2a}} c_2$	$p_2^{\omega_{2b}} c_2$	$p_2^{\omega_{2c}} c_2$
$A_1$			
$B_2$	$A_2$		
$B_2$		$A_2$	
$B_2$			$A_2$

Figura 8. Estrutura matricial do problema (11)-(12).

De acordo com a Figura 8, pode-se perceber que a estrutura de problemas estocástica é bastante esparsa. Isso reforça a ideia largamente difundida na literatura no que diz respeito a explorar a estrutura do problema quando os mesmos são solucionados por meio do ED.

Essa estrutura é também utilizada por alguns métodos de decomposição em PE, uma vez que para uma decisão viável  $x_1$  é

possível solucionar distintos subproblemas de segundo estágio recursivamente com um conjunto específico de variáveis e restrições, eliminando a necessidade de resolver o problema em sua forma original. Por exemplo, métodos baseados no princípio de DB usam essa estrutura matricial. Nesse ponto, convém lembrar que o acoplamento entre os estágios está associado à matriz  $B$ .

Por outro lado, a estrutura matricial do problema (17)-(18), onde a não-antecipatividade é representada em sua forma explícita, está ilustrada na Figura 9.

$p^1 c_1^1$	$p^1 c_2^1$	$p^2 c_1^2$	$p^2 c_2^2$	$p^3 c_1^3$	$p^3 c_2^3$
$A_1^1$	$A_2^1$				
$B_2^1$					
$W_1^1$		$W_2^1$		$W_3^1$	
		$A_1^2$	$A_2^2$		
		$B_2^2$			
$W_1^2$		$W_2^2$		$W_3^2$	
				$A_1^3$	$A_2^3$
				$B_2^3$	
$W_1^3$		$W_2^3$		$W_3^3$	

Figura 9. Estrutura matricial do problema (17)-(18).

Observe que há um incremento no número de variáveis e restrições do problema quando comparado com a Figura 8. Nesse caso, somente as restrições de não-antecipatividade  $W_s^t$  conectam as decisões entre cenários distintos. Essa estrutura é largamente utilizada por métodos que decompõem o Problema (17)-(18) em subproblemas correspondentes aos cenários. Podem ser citados como exemplos, os métodos baseados no LA, como é o caso método de PH estudado neste trabalho e detalhado no capítulo seguinte.

## 2.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em decorrência da característica estocástica do problema do PMO, uma introdução sobre PE foi apresentada neste capítulo, objetivando destacar a relevância de considerar as incertezas associadas às vazões afluentes em um problema de despacho hidrotérmico. Para

tanto, foi utilizado um sistema hidrotérmico simplificado em um horizonte igual a dois estágios.

Também com base no exemplo, foram apresentados conceitos sobre PE, como, por exemplo, VEIP e VSE, os quais contribuíram para evidenciar a importância da modelagem adequada das incertezas.

Ainda foi apresentada a formulação clássica de problemas de PE de dois estágios, ressaltando a representação das incertezas e a estrutura dos dados do problema, visando, sobretudo, facilitar a compreensão dos aspectos teóricos abordados na sequência deste documento.



## **CAPÍTULO 3**

### **MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA**

---

#### **3.1 INTRODUÇÃO**

Os aspectos teóricos discutidos no Capítulo 2 tiveram o objetivo de contextualizar o problema do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos sob o paradigma da PE, além de ressaltar as características mais relevantes associadas a esse tipo de problema.

Neste capítulo o foco são os métodos de solução, com especial atenção aos estudados neste trabalho: a DA e o método de PH.

#### **3.2 PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA MULTIESTÁGIO**

Nas últimas décadas, evoluções significativas no campo da PE têm sido observadas, em especial, com relação às técnicas de solução. Tais técnicas podem ser divididas em grupos de acordo com as suas características, uma vez que visam explorar a estrutura dos problemas de formas distintas (MORTON, 1998).

Inicialmente, convém dividir os algoritmos de acordo com o tratamento das incertezas. De forma resumida, dois tipos de algoritmos podem ser citados: (i) soluções exatas e; (ii) métodos de amostragem. O primeiro grupo resolve o problema considerando todo o conjunto  $\Omega$

(espaço amostral finito) das variáveis aleatórias do problema. Por outro lado, os métodos amostrais utilizam apenas um subconjunto do espaço amostral original  $\Omega$ ; ou seja, representam o espaço amostral de maneira simplificada. Esse tipo de algoritmo corresponde ao proposto por Pereira (1989).

Somente os métodos de solução exata, a DA e o método de PH, são estudados neste trabalho, os quais resolvem o problema considerando todo o espaço amostral  $\Omega$ , que, para um número elevado de iterações, tem a tendência de apresentar a mesma solução do ED.

Nesse contexto, existem algoritmos que visam explorar a estrutura do ED dos problemas estocásticos, também chamados de métodos diretos, a fim de reduzir o esforço computacional na solução do problema (CHRISTOFORIDIS *et al.*, 1996; MEDINA *et al.*, 1998).

Contudo, para problemas com um número muito grande de realizações, onde resolver o ED pode requerer um elevado esforço computacional, destacam-se os métodos de decomposição, que exploram a estrutura do problema com o intuito de subdividir o problema original em problemas menores, mantendo a coordenação entre as soluções dos mesmos (RUSZCZYŃSKI e SHAPIRO, 2003), conforme comentado no Capítulo 2.

Esses métodos de decomposição podem ainda ser classificados como: métodos de decomposição por nós, como é o caso da DA; métodos de decomposição por cenários, como por exemplo, a RL (RUSZCZYŃSKI, 1997; LUH *et al.*, 1998) e o LA (RUSZCZYŃSKI, 1992). Assim como existem outras denominações para os métodos de decomposição por nós, métodos primais ou métodos verticais, pois "atacam" a árvore de cenários da Figura 6, os métodos de decomposição por cenários são comumente definidos por alguns autores como métodos duais ou métodos horizontais.

Os métodos de decomposição por nós decompõem o problema original em estágios de decisão, em que os subproblemas correspondem aos nós e estão conectados por meio das restrições de acoplamento temporal (variáveis de estado). Nesse caso, a condição de não-antecipatividade está automaticamente garantida. Tais modelos matemáticos utilizam a estrutura matricial apresentada na Figura 8, do Capítulo 2.

Os métodos de decomposição por cenários utilizam a condição de não-antecipatividade (cenários que compartilham as mesmas decisões e realizações até o estágio  $t$  considerado) a fim de manter a conexão entre os subproblemas resultantes do processo, conforme ilustrado pela Figura 9. Nessa estratégia é necessário inserir um conjunto de restrições de não-

antecipatividade para cada nó da árvore de cenários em problemas multiestágios até o estágio  $T-1$ .

Em ambos os grupos dos métodos de solução exata, os subproblemas resultantes devem ser resolvidos diversas vezes até que seja atingida a otimalidade do problema. Ou seja, os algoritmos de decomposição correspondem a um processo iterativo. Ademais, é importante balancear as vantagens de solucionar problemas menores diversas vezes e o tempo computacional associado à solução dos mesmos; ou seja, observar o uso de memória computacional, o número de iterações e o tempo computacional por iteração durante o processo.

Na seção a seguir, a DA, que é um método de decomposição por nós baseado na DB, e o método de PH, baseado no LA, que é, em sua essência, um método de decomposição por cenários, são descritos.

### 3.3 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Nesta seção, os métodos estudados neste trabalho são apresentados com base na formulação clássica de problemas de PE de dois estágios, a fim de facilitar a descrição e os detalhes dos algoritmos de solução. Em particular, destacam-se as diferenças entre os algoritmos de solução de ambos os métodos, bem como algumas heurísticas propostas para o método de PH que visam, sobretudo, melhorar o desempenho computacional do mesmo.

De forma complementar, os algoritmos da DA e do método de PH são também apresentados no Apêndice A, considerando, contudo, um exemplo numérico simplificado, enfatizando as particularidades de ambos os algoritmos quando aplicados a um problema de despacho hidrotérmico.

#### 3.3.1 Decomposição Aninhada

A DA é um método baseado no princípio de DB, largamente utilizado na literatura, que decompõe o problema estocástico original em subproblemas correspondentes aos nós da árvore de cenários. Trata-se de uma extensão do método *L-Shaped*, porém aplicado geralmente em problemas de PL multiestágio. O nome *L-Shaped* pode ser associado a "forma de L" da estrutura matricial das restrições do problema (11)-(12), conforme ilustrado pela Figura 8.

Como a formulação clássica de problemas de dois estágios será utilizada, convém salientar que todas as particularidades discutidas a seguir são também válidas para problemas multiestágios e, por esse motivo, sempre são associadas à DA.

O propósito desse algoritmo consiste em resolver o subproblema correspondente ao primeiro estágio e gerenciar os demais estágios como outros subproblemas, resolvendo-os recursivamente. Desse modo, a árvore de cenários é "percorrida" no sentido direto do tempo trocando informações entre os subproblemas e, no sentido inverso, de forma a agregar informações advindas dos estágios futuros. Essas informações podem ser interpretadas como um conjunto de restrições de otimalidade que representam o custo do nó em questão e daqueles subsequentes na árvore de cenários.

De maneira resumida, o algoritmo de solução da DA é composto por duas etapas: *forward*, equivalente às recursões diretas no tempo em que é calculado o custo de operação de cada estágio com base nas aproximações disponíveis acerca do futuro, passando adiante as informações associadas às variáveis de estado do problema até atingir o último estágio do horizonte; *backward*, relacionada com as recursões inversas no tempo em que as aproximações dos custos futuros são efetivamente "construídas", retornando aos subproblemas dos nós antecessores até atingir o primeiro estágio sob a forma de equações lineares, conhecidos como Cortes de Benders, que valoram o custo futuro associado aos respectivos subproblemas sucessores.

Com base nesses aspectos, o algoritmo da DA é apresentado a seguir. Antes, contudo, é importante reescrever o problema de PE de dois estágios (11)-(12), conforme (19)-(20).

$$z(x_1, \xi) = \min_{\omega \in \Omega_2} c_1^T x_1 + \sum p_2^\omega c_2^T x_2^\omega \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a: } & A_1 x_1 = b_1, \\ & A_2 x_2^\omega + B_2 x_1 = b_2^\omega \\ & x_1 \geq 0, x_2^\omega \geq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

De acordo com (19)-(20), convém reforçar que a ideia de resolver os subproblemas de forma recursiva pode ser associada ao acoplamento temporal entre as decisões. Ou seja, as decisões do primeiro estágio alteram as condições iniciais do estágio seguinte e, assim, tais decisões devem ser iterativamente ajustadas a fim de obter a solução de menor custo esperado global para o problema.

Para a árvore de cenários ilustrada pela Figura 6, o problema pode ser, portanto, escrito de forma equivalente à (19)-(20), da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} z_1 &= \min c_1^T x_1 + Q_2(x_1), \\ \text{s.a: } A_1 x_1 &= b_1, \\ x_1 &\geq 0, \end{aligned} \quad (21)$$

em que,

$$Q_2(x_1) = \sum_{\omega \in \Omega} p_2^\omega z_2^\omega(x_1), \quad (22)$$

e

$$\begin{aligned} z_2^\omega(x_1) &= \min c_2^T x_2^\omega, \\ \text{s.a. : } A_2 x_2^\omega &= b_2^\omega - B_2 x_1, \\ x_2^\omega &\geq 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Note que na função objetivo do problema (21) há um termo que representa o valor esperado do custo de segundo estágio  $Q_2(x_1)$  como função das decisões  $x_1$ . Com base nessa formulação, é fácil perceber que o subproblema de primeiro estágio pode ser resolvido isoladamente com base na expectativa do custo de segundo estágio. Diante esses resultados, torna-se possível resolver os subproblemas de segundo estágio (23) de acordo com  $x_1$ .

De forma detalhada, a solução ótima do problema (21),  $x_1^*$ , é utilizada na resolução dos subproblemas de segundo estágio, conforme destacado abaixo.

$$\begin{aligned} z_2^\omega(x_1) &= \min c_2^T x_2^\omega \\ \text{s.a. : } A_2 x_2^\omega &= b_2^\omega - B_2 x_1^* \\ x_2^\omega &\geq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

O problema (24) deve, então, ser solucionado para todas as realizações  $\omega_2$  de segundo estágio. Nessa etapa do processo (primeiro recursão direta), a solução ainda não deve ser ótima, uma vez que para cada realização  $\omega_2$  existe uma única solução ótima  $x_1^*$  que otimiza as

decisões  $x_2^o$  e, por conseguinte, minimiza o valor esperado do custo total relativo ao segundo estágio do problema estocástico.

Desse modo, é necessário adicionar ao primeiro estágio informações que indiquem as consequências dessas decisões no estágio seguinte (etapa de recursão inversa). Para tanto, considere inicialmente o seguinte problema dual de (24),

$$\begin{aligned} z_2^o(x_1) &= \max_{\pi_2^o} \left( b_2^o - B_2 x_1 \right)^T \pi_2^o, \\ \text{s.a: } A_2^T \pi_2^o &\leq c_2, \end{aligned} \quad (25)$$

em que,

$\pi_2^o$  vetor de multiplicadores de Lagrange ótimos associados ao problema dual do problema, conforme detalhado em (PEREIRA, 1989). É importante lembrar que a derivada em relação à decisão de primeiro estágio  $x_1^*$  é igual a  $-B_2^T \pi_2^o$ .

Com base na informação da variável dual em relação às decisões de primeiro estágio (derivada em relação à  $x_1$ ), uma função linear por partes dependente de tais decisões pode, então, ser adicionada ao problema de primeiro estágio de tal forma que estime o custo total do segundo estágio de acordo com as decisões do estágio inicial, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min c_1^T x_1 + \alpha_2(x_1), \\ \text{s.a: } A_1 x_1 &= b_1, \\ \alpha_2 + \sum_{\omega \in \Omega_2} p_2^o \pi_2^{\omega T} B_2 x_1 &\geq \sum_{\omega \in \Omega_2} p_2^o z_2^{\omega} + \sum_{\omega \in \Omega_2} p_2^o \pi_2^{\omega T} B_2 x_1^*, \\ x_1 \geq 0, \alpha_2 &\geq 0, \end{aligned} \quad (26)$$

em que,

$\alpha_2(x_1)$  variável que representa a aproximação linear por partes de  $Q_2(x_1)$  com o máximo de cortes médios de tal forma que  $Q_2(x_1) \approx \alpha_2(x_1) = \max_* \sum_{\omega} p_2^o \left[ z_2^o(x_1^*) - \left( B_2^T \pi_2^{\omega*} \right)^T (x_1 - x_1^*) \right]$ .

Como  $Q(\cdot)$  é convexa,  $\alpha_2 \leq Q(\cdot)$ , garante-se que há uma boa aproximação.

Então, a estratégia de solução da DA consiste em um processo iterativo em que uma solução para o primeiro estágio é calculada levando em consideração todas as aproximações existentes. Por conseguinte, caso o problema não tenha atingido a convergência, um novo Cortes de Benders é construído e adicionado ao problema de primeiro estágio (nova etapa de recursão inversa). Assim, observe que o tamanho do problema cresce a cada iteração, o que aumenta a carga computacional do método.

Como a ideia é construir aproximações lineares por partes do custo de segundo estágio com o máximo número de cortes médios para o primeiro estágio, o critério de convergência compara, assim, o valor do custo total associado ao primeiro estágio (custo inferior - Zinf) e a soma dos custos individuais associados a todos os subproblemas respeitando suas respectivas probabilidades em ambos os estágios (custo superior - Zsup). Caso esse valor seja menor ou igual a uma tolerância estabelecida, o processo iterativo deve ser interrompido. Neste ponto, vale reforçar que a variável  $\alpha_2(x_1)$  aproxima o custo esperado do segundo estágio, fato que justifica o critério de convergência adotado.

Agora, com base no problema de PE de dois estágios, é possível apresentar o modelo para um problema PE multiestágio. A formulação a seguir, representa um problema para um determinado nó  $\omega_t$  no estágio  $t$  do processo da DA.

$$\begin{aligned}
 & \min c_t^T x_t^{\omega_t} + \alpha_{t+1} \\
 & \text{s.a: } A_t x_t^{\omega_t} = b_t^{\omega_t} - B_t x_{t-1}^{a(\omega_t)}, \\
 & \alpha_{t+1} + \sum_{\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_t)} p_{t+1}^{\omega_{t+1}} \pi_{t+1}^{\omega_{t+1}T} B_{t+1} x_t^{\omega_t} \geq \sum_{\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_t)} p_{t+1}^{\omega_{t+1}} z_{t+1}^{\omega_{t+1}*} \\
 & + \sum_{\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_t)} p_{t+1}^{\omega_{t+1}} \pi_{t+1}^{\omega_{t+1}T} B_{t+1} x_t^{\omega_t*}, \\
 & x_t^{\omega_t} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Todas as etapas previamente descritas podem ser estendidas para o caso multiestágio. Na Figura 10 está ilustrado o algoritmo de solução da DA.

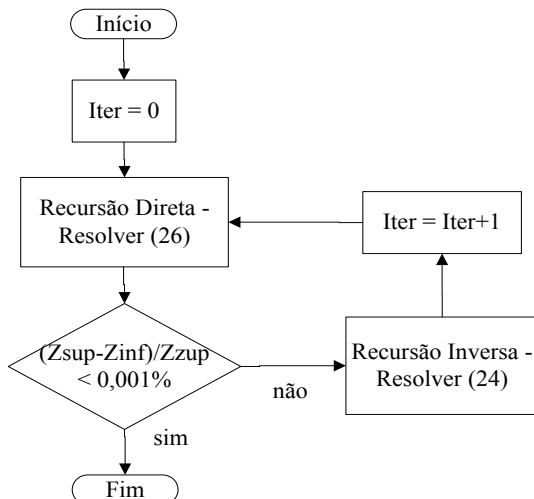


Figura 10. Algoritmo de solução da DA.

Nessa classe de métodos, além de iterações iniciais ineficientes, melhorias no que diz respeito à qualidade da solução quando o processo encontra-se próximo da convergência podem ser insignificantes. Tal fato pode requerer um número acentuado de iterações, retardando a convergência do algoritmo.

### 3.3.2 O método de *Progressive Hedging*

Diferentemente da DA, o método de PH método pertence à classe dos métodos de decomposição baseados no LA (NOCEDAL e WRIGHT, 1999; BIRGIN *et al.*, 2005) o qual decompõe o Problema (17)-(18) em subproblemas correspondentes aos cenários.

Nesse sentido, cada subproblema resultante desse processo pode ser considerado como um problema determinístico multistágio, com um conjunto particular de variáveis, interconectados somente pelas restrições de não-antecipatividade. Desse modo, a esparsidade apresentada na Figura 9 é explorada em seu processo iterativo.

De forma resumida, métodos de decomposição baseados no LA relaxam algumas restrições do problema (inserem tais restrições na função objetivo por meio de um vetor de multiplicadores de Lagrange que, nesse caso, correspondem às restrições de não-antecipatividade) mantendo o acoplamento entre os cenários para, em seguida, resolver



todos os subproblemas individualmente forçando de maneira gradual a não-antecipatividade a um valor único (comum entre os cenários). Além do vetor de multiplicadores relacionado com as variáveis relaxadas, há na função objetivo um termo quadrático das restrições relaxadas (as restrições de não-antecipatividade) penalizado por um parâmetro  $\mu$ . Essa característica tende a estabilizar a solução do método e ainda pode acelerar o processo de convergência quando comparado a RL, por exemplo. Além do método de PH, outros métodos compartilham os mesmos princípios do LA, como é o caso da Aproximação Diagonal Quadrática – ADQ (BERGER *et al.*, 1994).

Em virtude das características do problema de interesse, associada também a flexibilidade do método de PH, duas distintas estratégias de decomposição via método de PH detalhadas a seguir foram estudadas nesse trabalho: (i) Decomposição Clássica; (ii) Decomposição Alternativa.

### 3.3.2.1 Decomposição Clássica

A Decomposição Clássica pode ser definida neste trabalho como sendo a estratégia de decomposição padrão via método de PH, em que todas as variáveis do problema associadas às restrições de não-antecipatividade são relaxadas. Nesse caso em particular, essas variáveis correspondem aquelas de primeiro estágio,  $x_1$ .

Antes de apresentar as particularidades do algoritmo de solução clássico do método de PH, é importante reescrever o Problema (17)-(18) de forma extensiva, associado a Figura 7 (3 cenários), em que as restrições de não-antecipatividade estão modeladas de forma explícita.

$$\begin{aligned}
 f = \min & \ p^1 (c_1^1 x_1^1 + c_2^1 x_2^1) + p^2 (c_1^2 x_1^2 + c_2^2 x_2^2) + p^3 (c_1^3 x_1^3 + c_2^3 x_2^3), \\
 \text{s.a.: } & A_1^1 x_1^1 = b_1^1, \\
 & B_2^1 x_1^1 + A_2^1 x_2^1 = b_2^1, \\
 & A_1^2 x_1^2 = b_1^2, \\
 & B_2^2 x_1^2 + A_2^2 x_2^2 = b_2^2, \\
 & A_1^3 x_1^3 = b_1^3, \\
 & B_2^3 x_1^3 + A_2^3 x_2^3 = b_2^3, \\
 & x_1^1 - x_1^2 = 0, \ x_1^1 - x_1^3 = 0, \ x_1^2 - x_1^3 = 0, \\
 & x_t^s \geq 0, \forall t = 1, 2, s = 1, \dots, 3.
 \end{aligned} \tag{28}$$

De acordo com (28), é possível perceber que as restrições de não-antecipatividade tornam o problema não separável em diferentes cenários, uma vez que as decisões referentes a cada um deles ainda estão interconectadas (vide Figura 9). Ou seja, as variáveis  $x_1^1$  do cenário 1 dependem das variáveis  $x_1^2$  e  $x_1^3$  pertencentes aos cenários 2 e 3, respectivamente. Tal fato torna impossível resolver os subproblemas associados aos cenários de forma individual.

Para sobrepujar essa dificuldade, a não-antecipatividade é então modelada por um valor constante em cada iteração, chamado de valor meta neste trabalho, correspondente ao valor esperado das decisões, conforme descrito a seguir:

$$\bar{x} = p^1 x_1^1 + p^2 x_1^2 + p^3 x_1^3. \quad (29)$$

Portanto, o Problema (28) pode ser reescrito como destacado abaixo.

$$\begin{aligned} f = \min & p^1 (c_1^1 x_1^1 + c_2^1 x_2^1) + p^2 (c_1^2 x_1^2 + c_2^2 x_2^2) + p^3 (c_1^3 x_1^3 + c_2^3 x_2^3), \\ \text{s.a.: } & A_1^1 x_1^1 = b_1^1, \\ & B_2^1 x_1^1 + A_2^1 x_2^1 = b_2^1, \\ & A_1^2 x_1^2 = b_1^2, \\ & B_2^2 x_1^2 + A_2^2 x_2^2 = b_2^2, \\ & A_1^3 x_1^3 = b_1^3, \\ & B_2^3 x_1^3 + A_2^3 x_2^3 = b_2^3, \\ & x_1^1 - \bar{x} = 0, x_1^2 - \bar{x} = 0, x_1^3 - \bar{x} = 0, \\ & x_t^s \geq 0, \forall t = 1, 2, s = 1, \dots, 3. \end{aligned} \quad (30)$$

Para obter a separabilidade, o passo seguinte consiste em relaxar as restrições de não-antecipatividade usando o conceito do LA a fim de obter o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
\Phi = & \min f + p^1 \pi^1 (x_1^1 - \bar{x}) + p^2 \pi^2 (x_1^2 - \bar{x}) + p^3 \pi^3 (x_1^3 - \bar{x}) \\
& + p^1 \frac{\mu}{2} \|x_1^1 - \bar{x}\|^2 + p^2 \frac{\mu}{2} \|x_1^2 - \bar{x}\|^2 + p^3 \frac{\mu}{2} \|x_1^3 - \bar{x}\|^2, \\
\text{s.a.: } & A_1^1 x_1^1 = b_1^1, \\
& B_2^1 x_1^1 + A_2^1 x_2^1 = b_2^1, \\
& A_1^2 x_1^2 = b_1^2, \\
& B_2^2 x_1^2 + A_2^2 x_2^2 = b_2^2, \\
& A_1^3 x_1^3 = b_1^3, \\
& B_2^3 x_1^3 + A_2^3 x_2^3 = b_2^3, \\
& x_t^s \geq 0, \forall t = 1, 2, s = 1, \dots, 3.
\end{aligned} \tag{31}$$

Logo, é possível escrever um subproblema para cada cenário particular, com um conjunto específico de variáveis e restrições, de modo a calcular  $\Phi$ , da seguinte forma:

$$\Phi = p^1 \phi^1 + p^2 \phi^2 + p^3 \phi^3, \tag{32}$$

em que  $\phi^s$  é resultante da resolução de cada subproblema correspondente aos cenários  $s$ , conforme (33):

$$\begin{aligned}
\phi^s = & \min (c_1^s x_1^s + c_2^s x_2^s) + \pi^s (x_1^s - \bar{x}) + \frac{\mu}{2} \|x_1^s - \bar{x}\|^2, \\
\text{s.a.: } & A_1^s x_1^s = b_1^s \\
& B_2^s x_1^s + A_2^s x_2^s = b_2^s, \\
& x_1^s \geq 0, x_2^s \geq 0 \\
& s = 1, \dots, 3.
\end{aligned} \tag{33}$$

Com os resultados dos subproblemas (33), a próxima etapa do algoritmo consiste em calcular o novo valor meta, (29), e atualizar o vetor de multiplicadores de Lagrange por meio do método do gradiente com passo unitário, conforme exposto em (34).

$$\pi_{iter+1}^s = \pi_{iter}^s + \mu(x_1^s - \bar{x}). \tag{34}$$

Por fim, a convergência do algoritmo deve ser avaliada. Em geral, os desvios entre as restrições de não-antecipatividade são analisados e

utilizados no critério de parada. Neste trabalho, além do desvio entre as restrições de não-antecipatividade (variáveis primais), também se propõe à observância dos desvios entre multiplicadores de Lagrange de iterações sucessivas (HELGASON e WALLACE, 1991), como detalhado a seguir:

$$D_{iter} = E \left[ \sum_{s=1}^S \left( \|x_1^s - \bar{x}\|^2 + \frac{1}{\mu^2} \|\pi_{iter+1}^s - \pi_{iter}^s\|^2 \right) \right] < \varepsilon. \quad (35)$$

Como pode ser observado, o critério corresponde ao um valor absoluto. Assim, foi admitido um erro  $\varepsilon$  igual a 100. A escolha do valor de  $\varepsilon$  pode ser justificada por meio de uma análise exaustiva dos desvios entre as variáveis relaxadas e seus valores metas, melhor apresentada no Capítulo 5.

De forma resumida, o algoritmo de solução do método de PH é apresentado na Figura 11.

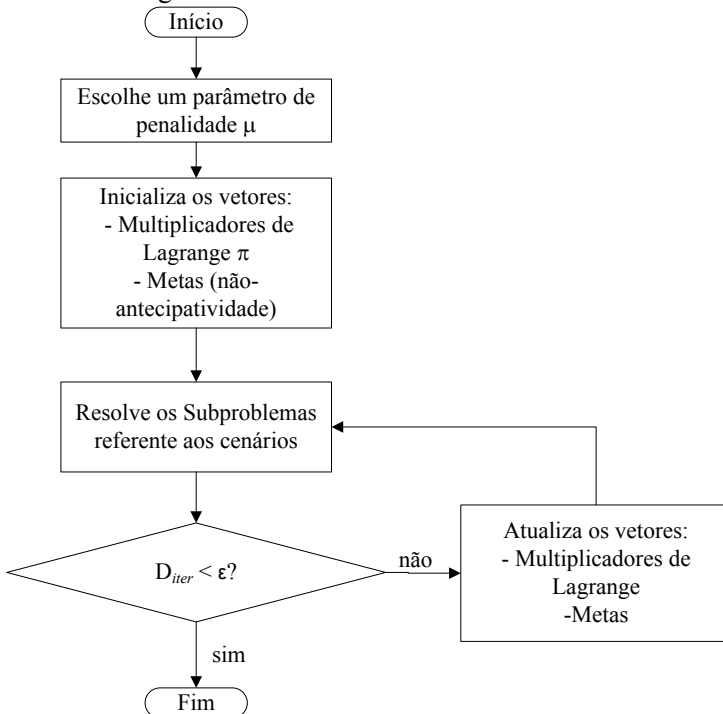


Figura 11. Algoritmo de solução do método de PH.

Esse algoritmo apresenta algumas vantagens quando comparado com outros métodos de decomposição. Por exemplo, é possível utilizar técnicas de partida quente (SANTOS *et al.*, 2009), uma vez que pontos iniciais de boa qualidade podem prover benefícios à convergência do algoritmo. Além disso, tendo em vista que a estrutura dos subproblemas é idêntica e sua dimensão é mantida constante ao longo das iterações, o uso de algoritmos especializados pode prover ganhos ao desempenho do método. Em outras palavras, pode ser interessante decompor os subproblemas determinísticos correspondentes aos cenários em subproblemas ainda menores relativos aos estágios, como destacado no Apêndice B. Nesse caso, não há necessidade de resolver os subproblemas de forma exata, como apresentado por Helgason e Wallace (1991). Essa estratégia pode ser útil para problema de grande porte com um elevado número de estágios.

Outro aspecto crítico é fundamental para o sucesso do algoritmo: a escolha de um parâmetro de penalidade  $\mu$ . De uma maneira geral, o argumento mais difundido na literatura é que deve ser o menor possível, desde que garanta a convergência do algoritmo (MULVEY e VLADIMIROU, 1991). Nesse sentido, estudos relacionados com a atualização iterativa do parâmetro de penalidade foram efetuados neste trabalho a fim de evitar esforços adicionais relacionados com a busca de um parâmetro ótimo para cada caso estudado. As propostas também envolvem os desvios entre as restrições de não-antecipatividade e são detalhadas no capítulo de resultados, Capítulo 5.

Adicionalmente, no algoritmo do método de PH tem-se uma “fraca” interconexão entre os subproblemas em decorrência das restrições de não-antecipatividade, as quais são somente atualizadas ao final de cada iteração. Tal peculiaridade torna essa ferramenta computacional mais facilmente paralelizável quando comparado com a DA, por exemplo.

É ainda importante destacar outra importante característica do método de PH que não tem recebido atenção especial na literatura: a flexibilidade de obter diferentes problemas duais de um mesmo problema primal, possibilitando encontrar formas mais apropriadas de decompor o problema original de acordo com sua estrutura. Este estudo corresponde a das contribuições deste trabalho. No tópico seguinte é apresentada a estratégia de decomposição alternativa à decomposição clássica aqui descrita.

### 3.3.2.2 Decomposição Alternativa

No tópico precedente, foi apresentado o algoritmo clássico do método de PH, em que todas as variáveis  $x_1$  são relaxadas em seu processo de decomposição. Contudo, diante da flexibilidade do método e das características do problema do PMO, neste trabalho é proposto um método alternativo de decomposição do problema original (17)-(18).

O objetivo consiste em relaxar um subconjunto de  $x_1$  e, assim, obter um problema dual com um menor número de variáveis quando comparado com a decomposição clássica. Convém lembrar que isso é possível dado que o problema em estudo tem uma única variável de estado; ou seja, uma única variável é "responsável" pelo acoplamento temporal entre as decisões (estágios). Com base nos capítulos precedentes, essa característica pode ser atribuída às variáveis de armazenamento dos reservatórios, que, uma vez definidas, possibilitam determinar as demais variáveis do problema.

Nesse contexto, é possível reescrever (28) separando as variáveis de estado  $y_1^s$  do vetor  $x_1^s$ , em que,

$$x_1^s = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^s \\ y_1^s \end{pmatrix}, \quad (36)$$

sendo  $\hat{x}_1^s$  uma variável de controle, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f = & \min p^1 (c_1^1 x_1^1 + c_2^1 x_2^1) + p^2 (c_1^2 x_1^2 + c_2^2 x_2^2) + p^3 (c_1^3 x_1^3 + c_2^3 x_2^3), \\ \text{s.a.: } & \hat{A}_1^1 \hat{x}_1^1 + \check{A}_1^1 y_1^1 = b_1^1, \\ & B_2^1 y_1^1 + A_2^1 x_2^1 = b_2^1, \\ & \hat{A}_1^2 \hat{x}_1^2 + \check{A}_1^2 y_1^2 = b_1^2, \\ & B_2^2 y_1^2 + A_2^2 x_2^2 = b_2^2, \\ & \hat{A}_1^3 \hat{x}_1^3 + \check{A}_1^3 y_1^3 = b_1^3, \\ & B_2^3 y_1^3 + A_2^3 x_2^3 = b_2^3, \\ & y_1^1 - y_1^2 = 0, y_1^1 - y_1^3 = 0, y_1^2 - y_1^3 = 0, \\ & \hat{x}_t^s \geq 0, y_t^s \geq 0, x_t^s \geq 0, \forall t = 1, 2, s = 1, \dots, 3. \end{aligned} \quad (37)$$

Note, contudo, que as restrições de não-antecipatividade podem ser agora representadas somente pelas variáveis de estado do problema  $y_t^s$ . Logo, (29) deve ser redefinido como:

$$\bar{y} = p^1 y_1^1 + p^2 y_1^2 + p^3 y_1^3. \quad (38)$$

Assim,

$$\begin{aligned} f = & \min p^1 (c_1^1 x_1^1 + c_2^1 x_2^1) + p^2 (c_1^2 x_1^2 + c_2^2 x_2^2) + p^3 (c_1^3 x_1^3 + c_2^3 x_2^3), \\ \text{s.a.: } & \bar{A}_1^1 \bar{x}_1^1 + \bar{A}_1^1 y_1^1 = b_1^1, \\ & B_2^1 y_1^1 + A_2^1 x_2^1 = b_2^1, \\ & \bar{A}_1^2 \bar{x}_1^2 + \bar{A}_1^2 y_1^2 = b_1^2, \\ & B_2^2 y_1^2 + A_2^2 x_2^2 = b_2^2, \\ & \bar{A}_1^3 \bar{x}_1^3 + \bar{A}_1^3 y_1^3 = b_1^3, \\ & B_2^3 y_1^3 + A_2^3 x_2^3 = b_2^3, \\ & y_1^1 - \bar{y} = 0, y_1^2 - \bar{y} = 0, y_1^3 - \bar{y} = 0, \\ & \bar{x}_t^s \geq 0, y_t^s \geq 0, x_t^s \geq 0, \forall t = 1, 2, s = 1, \dots, 3. \end{aligned} \quad (39)$$

Por conseguinte, o problema (31) pode ser assim reescrito:

$$\begin{aligned} \Phi = & \min f + \pi^1 (y_1^1 - \bar{y}) + \pi^2 (y_1^2 - \bar{y}) + \pi^3 (y_1^3 - \bar{y}) \\ & + \frac{\mu}{2} \|y_1^1 - \bar{y}\|^2 + \frac{\mu}{2} \|y_1^2 - \bar{y}\|^2 + \frac{\mu}{2} \|y_1^3 - \bar{y}\|^2, \\ \text{s.a.: } & \bar{A}_1^1 \bar{x}_1^1 + \bar{A}_1^1 y_1^1 = b_1^1, \\ & B_2^1 y_1^1 + A_2^1 x_2^1 = b_2^1, \\ & \bar{A}_1^2 \bar{x}_1^2 + \bar{A}_1^2 y_1^2 = b_1^2, \\ & B_2^2 y_1^2 + A_2^2 x_2^2 = b_2^2, \\ & \bar{A}_1^3 \bar{x}_1^3 + \bar{A}_1^3 y_1^3 = b_1^3, \\ & B_2^3 y_1^3 + A_2^3 x_2^3 = b_2^3, \\ & \bar{x}_t^s \geq 0, y_t^s \geq 0, \forall t = 1, 2, s = 1, \dots, 3, \end{aligned} \quad (40)$$

Por sua vez, os subproblemas correspondentes aos cenários  $s$  podem ser representados conforme (41).

$$\begin{aligned}
\phi^s &= \min \left( c_1^s x_1^s + c_2^s x_2^s \right) + \pi^s \left( y_1^s - \bar{y} \right) + \frac{\mu}{2} \|y_1^s - \bar{y}\|^2, \\
\text{s.a.: } \quad &\widehat{A}_1^s \widehat{x}_1^s + \widetilde{A}_1^s y_1^s = b_1^s, \\
&B_2^s y_1^s + A_2^s x_2^s = b_2^s, \\
&x_1^s \geq 0, x_2^s \geq 0.
\end{aligned} \tag{41}$$

O algoritmo corresponde àquele descrito anteriormente, em que o passo seguinte consiste em calcular os novos valores metas e os multiplicadores de Lagrange para, em seguida, analisar o critério de convergência, também conforme (35).

Por essa estratégia, o número de multiplicadores de Lagrange e termos quadráticos penalizados na função objetivo são reduzidos, uma vez que  $y_1^s$  é um subconjunto de  $x_1^s$ . Como consequência, o problema dual é mais facilmente e rapidamente resolvido, assim como a implementação do algoritmo.

### 3.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal propósito deste capítulo consistiu em apresentar os algoritmos de solução de ambos os métodos estudados neste trabalho. Inicialmente, foram destacados os diferentes grupos de métodos, ressaltando, em especial, o modo pelo qual cada método decompõe o problema estocástico original.

Nesse contexto, as principais diferenças entre os métodos, suas vantagens e desvantagens, bem com as inovações propostas foram apresentadas.

Destaca-se, nesse sentido, a decomposição alternativa via método de PH, cuja ideia consiste em decompor o problema original de forma a reduzir o tamanho do problema dual e, por conseguinte, prover melhorias ao desempenho computacional do método.

A partir dos aspectos teóricos descritos neste capítulo, no Capítulo 4 são apresentadas as formulações resultantes de ambos os métodos aqui detalhados quando aplicados na solução do problema do PMO.



## **CAPÍTULO 4**

### **O PROBLEMA DA PROGRAMAÇÃO DA OPERAÇÃO ENERGÉTICA**

---

#### **4.1 INTRODUÇÃO**

Neste capítulo, tem-se como objetivo principal apresentar detalhadamente as principais características operativas do PMO consideradas nos modelos computacionais desenvolvidos no âmbito deste trabalho. Convém destacar que, exceto a FPH, que foi baseado no artigo de Diniz e Maceira (2008), as demais características são modeladas analogamente àquela descrita nos manuais do DECOMP (CEPEL, 2010b).

Ainda neste capítulo, uma ideia da formulação dos subproblemas para os dois métodos estudados neste trabalho é apresentada, ressaltando as principais particularidades de cada uma delas e suas diferenças com base nas características operativas descritas inicialmente.

## 4.2 CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA

No Brasil, a estrutura atual da cadeia de modelos visa, em última instância, definir o despacho de todas as usinas e o preço da energia do sistema, o qual é, particularmente, definido com base no Custo Marginal de Operação - CMO, obtido por meio dos multiplicadores de Lagrange relacionados com as restrições de atendimento à demanda. Para tanto, o modelo DECOMP, principal ferramenta utilizada no PMO, faz uso de informações futuras advindas do modelo NEWAVE, associadas ao PEN, de modo a valorar a expectativa futura dos recursos armazenados nos reservatórios, mantendo, desse modo, a coordenação entre as distintas etapas da cadeia.

De fato, os estudos associados ao PMO dão suporte ao ONS na definição de estratégias de geração das usinas com o intuito de atender a demanda do sistema para o horizonte preestabelecido nessa etapa. Por sua vez, a CCEE utiliza as mesmas ferramentas computacionais do PMO de modo a determinar o preço da energia elétrica no mercado de curto prazo.

Como já introduzido nos capítulos anteriores, o modelo computacional DECOMP é uma programa de PE, em que a árvore de cenários é representada conforme Figura 12. Em particular, o horizonte de planejamento considerado nesse estudo é igual a dois meses, sendo o primeiro mês dividido em semanas (o total de semanas considerado pode ser igual a quatro, cinco ou seis, de acordo com o mês de estudado). As incertezas inerentes ao modelo são, contudo, modeladas apenas no mês seguinte aos estágios semanais do primeiro mês. Por exemplo, de acordo com a Figura 12, os cinco primeiros estágios com uma única realização correspondem às semanas do primeiro mês e o último estágio representa o mês subsequente, o qual apresenta  $n$  possível realizações.

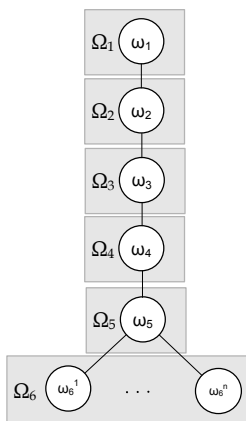


Figura 12. Árvore de cenários do modelo DECOMP.

Além dos fatores estocásticos, o modelo DECOMP possui outras características operativas importantes. A seguir, estão apresentadas aquelas que também estão consideradas nos modelos computacionais desenvolvidos neste trabalho:

- representação dos patamares de carga (pesado, médio, leve);
- limites de fluxo entre subsistemas;
- representação da curva de déficit por patamares (função linear por partes);
- restrições que envolvem o transporte entre Itaipu 50 Hz e o SE, bem como Itaipu 60 Hz e um nó fictício de Ivaiporã (SU);
- acoplamento com o modelo NEWAVE (PEN);
- volume de espera para amortecimento de cheias;
- cronograma de manutenção;
- representação de unidades elevatórias;
- representação da função de produção das usinas hidrelétricas por meio de uma função linear por partes;
- tempo de viagem da vazão defluente;
- evaporação;
- geração de pequenas usinas.

Na sequência, algumas dessas características supracitadas são discutidas com maiores detalhes.

### 4.3 ASPECTOS DA MODELAGEM

Inicialmente, considere a configuração hidrotérmica apresentada na Figura 3 do Capítulo 2.

Como comentado, o objetivo é obter o mínimo valor esperado do custo de operação do sistema de forma a atender basicamente duas restrições importantes: suprimento de demanda e conservação da massa d'água. A restrição de atendimento à demanda visa garantir que a produção total de energia seja igual à demanda do sistema para cada período de planejamento, respeitando os respectivos limites operativos das usinas. Por sua vez, a restrição de conservação da massa d'água representa o balanço entre a afluência total ao reservatório, a vazão defluente e o volume armazenado. Dito de outro modo, a quantidade de água ao final do estágio no reservatório deve ser igual à quantidade de água inicial, somada a quantidade de água que chega ao mesmo, subtraída da quantidade de água que deixa o reservatório, seja por meio da vazão turbinada ou vertida, desprezando, obviamente, outras perdas, tais como: evaporação e desvios. Desse modo, é possível reformular o problema de forma genérica como mostrado a seguir:

$$F = \min \sum_{t=1}^T \sum_{\omega \in \Omega_t} p^{\omega_t} \sum_{j=1}^J ct_{jt} g t_{jt}^{\omega_t}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.: } & \sum_{j=1}^J g t_{jt}^{\omega_t} + \sum_{i=1}^I g h_{it}^{\omega_t} = L_t, \\ & v_{it}^{\omega_t} - v_{it}^{\omega_{t-1}} + C \left( q_{it}^{\omega_t} + s p_{it}^{\omega_t} \right) = C a_{it}^{\omega_t}, \\ & g t_{jt}^{\omega_t} \leq g t_{jt}^{\max}, g h_{it}^{\omega_t} \leq g h_{it}^{\max}, v_{it}^{\omega_t} \leq v_{it}^{\max}, q_{it}^{\omega_t} \leq q_{it}^{\max} \\ & t = 1, \dots, T. \end{aligned} \quad (43)$$

em que,

$T$	horizonte total de estudo;
$t$	índice associados aos estágios, $t = 1, \dots, T$ ;
$I$	número total de usinas hidrelétricas do sistema;
$i$	índice associado às usinas hidrelétricas do sistema;
$v_{it}^{\omega_t}$	volume armazenado no $i$ -ésimo reservatório no estágio $t$ , considerando uma determinada realização $\omega_t$ ( $\text{hm}^3$ );
$q_{it}^{\omega_t}$	vazão turbinada pelo $i$ -ésimo reservatório no estágio $t$ em para uma específica realização $\omega_t$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ );

$sp_{it}^{\omega_t}$	vazão vertida pelo $i$ -ésimo reservatório no estágio $t$ para uma específica realização $\omega_t$ ( $m^3/s$ );
$a_{it}^{\omega_t}$	vazão afluente incremental ao $i$ -ésimo reservatório no estágio $t$ em uma específica realização $\omega_t$ ( $m^3/s$ );
$J$	número total de usinas termelétricas;
$j$	índice associado às usinas termelétricas;
$ct_{jt}$	custo variável unitário da $j$ -ésima usina termelétrica no estágio $t$ (R\$/MWmédio);
$g_{jt}^{\omega_t}$	energia gerada pela $j$ -ésima usina termelétrica no estágio $t$ considerando uma específica realização $\omega_t$ (MWmédio);
$gh_{jt}^{\omega_t}$	energia gerada pela $j$ -ésima usina hidrelétrica no estágio $t$ considerando uma específica realização $\omega_t$ (MWmédio);
$L_t$	demanda de energia durante o estágio $t$ (MWmédio);
$C$	fator de conversão da unidade de vazão ( $m^3/s$ ) para unidade de volume ( $hm^3$ ) para o horizonte de interesse.

Com base no problema (42)-(43), é possível introduzir os aspectos particulares da modelagem do PMO.

#### 4.3.1 Representação dos patamares de carga

A representação dos patamares de carga visa, entre outros fatores, manter a coerência com o modelo de médio prazo. Os patamares emulam a flutuação da carga ao longo de um estágio. Em outras palavras, a ideia consiste em dividir a demanda ao longo do período de análise em três níveis diferentes, conforme ilustrado na Figura 13.

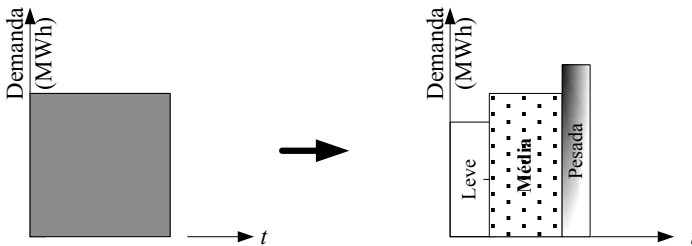


Figura 13. Patamares de Carga.

Essa característica impacta diretamente na formulação das duas restrições do problema detalhadas em (43). Assim, é possível reescrevê-las considerando as modificações em decorrência dos patamares de carga, conforme (44)-(45).

- Restrição de conservação da massa d'água considerando os patamares de carga

$$v_{it}^{\omega_t} - v_{i,t-1}^{\omega_{t-1}} + C \sum_u^U \left( q_{iut}^{\omega_t} + sp_{iut}^{\omega_t} \right) \delta_{ut} = Ca_{it}^{\omega_t}, \quad (44)$$

$$t = 1, \dots, T, \omega_t = 1, \dots, \Omega_t.$$

- Restrição de atendimento à demanda considerando os patamares de carga

$$\sum_{j=1}^J g t_{jut}^{\omega_t} + \sum_{i=1}^I g h_{iut}^{\omega_t} = L_{ut}, \quad (45)$$

$$t = 1, \dots, T, u = 1, \dots, U,$$

em que,

- $U$  número total de patamares de carga;
- $u$  índice associado ao número de patamares de carga;
- $\delta_{ut}$  percentual de horas no  $u$ -ésimo patamar do estágio  $t$ . Esse valor representa o tempo de duração de cada patamar de carga no estágio correspondente. Logo,  $\sum_{u=1}^U \delta_{ut} = 1$ .

Note que existem tantas equações de atendimento à demanda quantos patamares, uma vez que se consideram diferentes horas do período em cada patamar de carga. Por outro lado, há apenas uma equação de conservação da massa d'água, em virtude da cronologia associada ao uso da água. Assim, considerar uma equação de conservação para cada patamar de carga não faz sentido. O que se impõe nessa representação é que haja um total de água capaz de atender a demanda em cada patamar sem cronologia de seu uso. Uma consequência da representação dos patamares de carga é que há um aumento do número de restrições, bem como de variáveis no problema

(exceto as variáveis de volume e afluência, as demais variáveis devem ser consideradas por patamar de carga).

#### 4.3.2 Acoplamento espacial entre usinas hidrelétricas

A fim de contemplar a operação de diversas usinas em uma mesma cascata, o que é típico no Brasil, a equação de conservação da massa d'água deve também considerar essa característica importante do sistema, conforme apresentado em (46).

$$v_{it}^{\omega_t} - v_{i,t-1}^{\omega_{t-1}} + C \sum_u^U \left[ q_{iut}^{\omega_t} + sp_{iut}^{\omega_t} - \sum_{m \in M_i} \left( q_{mut}^{\omega_t} + sp_{mut}^{\omega_t} \right) \right] \delta_{ut} = Ca_{it}^{\omega_t}, \quad (46)$$

$$t = 1, \dots, T, \omega_t = 1, \dots, \Omega_t.$$

em que,

- $M_i$  conjunto de usinas localizadas imediatamente à montante da usina  $i$ ;
- $m$  índice associado com o conjunto de usinas imediatamente à montante da usina  $i$ .

O tempo que a água utilizada na operação de uma usina localizada a montante na cascata leva para atingir o reservatório de jusante pode ser superior a um estágio do horizonte de planejamento ou ainda pode ser significativo em relação à duração do estágio considerado. Nesses casos, deve-se também considerar o tempo de viagem da água na modelagem do problema, como detalhado no Apêndice D.

#### 4.3.3 Limite de fluxo entre subsistemas

A interligação entre diferentes subsistemas pode proporcionar uma maior confiabilidade do sistema, tendo em vista a possibilidade de complementaridade energética entre os mesmos, mitigando o risco de déficit e, consequentemente, promovendo uma redução no custo total de operação do sistema. Assim, os intercâmbios devem ser contemplados e a equação (45) deve ser rearranjada.

Nesse contexto, é possível reescrevê-la levando em consideração tais características, da seguinte maneira:

$$\sum_{j=1}^{J_e} g t_{jut}^{\omega_t} + \sum_{i=1}^{I_e} g h_{iut}^{\omega_t} + \sum_{l \in \Gamma_e} f_{leut}^{\omega_t} = L_{uet}, \quad (47)$$

$$t = 1, \dots, T, u = 1, \dots, U,$$

em que,

- $E$  número total de subsistemas;
- $e$  índice relacionado ao subsistema;
- $\Gamma_e$  conjunto de subsistemas eletricamente conectados ao subsistema  $e$ ;
- $f_{leut}^{\omega_t}$  fluxo de energia do subsistema  $l$  para o subsistema  $e$  durante o patamar  $u$  do estágio  $t$  considerando uma determinada realização  $\omega_t$  (MWmédio).

O intercâmbio entre subsistemas é, portanto, limitado entre valores máximos e mínimos de fluxo por patamar  $u$  e estágio de tempo  $t$ , como descrito em (48).

$$f_{leut}^{\min} \leq f_{leut}^{\omega_t} \leq f_{leut}^{\max}, u = 1, \dots, U, t = 1, \dots, T, \quad (48)$$

em que,

- $f_{leut}^{\min}$  limite mínimo de fluxo de energia entre os subsistemas  $l$  e  $e$  durante o patamar  $u$  do estágio  $t$ ;
- $f_{leut}^{\max}$  limite máximo de fluxo de energia entre os subsistemas  $l$  e  $e$  durante o patamar  $u$  do estágio  $t$ .

#### 4.3.4 Representação de curvas de déficit por patamar

Há duas maneiras de representar matematicamente o déficit de energia no problema: (i) representação por meio de uma única usina térmica fictícia de capacidade infinita com custo superior à térmica mais cara; (ii) modelado por meio de uma curva linear por partes, as quais representam usinas termelétricas fictícias com capacidades e custos distintos.

A segunda opção é usualmente aplicada ao modelo de médio prazo (PEN) e, para manter a coerência entre as etapas, o problema da



programação mensal também deve considerá-la. Para tanto, a Equação (47) deve ser novamente reescrita, de acordo com (49).

$$\sum_{j=1}^J g t_{jut}^{\omega_t} + \sum_{i=1}^I g h_{iut}^{\omega_t} + \sum_{l \in \Gamma_e} f_{leut}^{\omega_t} + \sum_{v=1}^Y d_{vuet}^{\omega_t} = L_{uet}, \quad (49)$$

$$t = 1, \dots, T, \quad u = 1, \dots, U,$$

em que,

- $Y$  número total de curvas de custo de déficit;
- $v$  índice relativo à curva de custo de déficit por percentual da carga;
- $d_{vuet}^{\omega_t}$  déficit de para o patamar de déficit  $v$  durante o patamar de carga  $u$  do subsistema  $e$  do estágio  $t$  para uma específica realização  $\omega_t$  (MWmédio).

A fim de representar custos distintos para cada patamar de déficit é necessário multiplicar o limite superior por um percentual associado a cada intervalo da curva de patamares. Logo, a curva de déficit pode ser representada como exposto em (50):

$$0 \leq d_{vute} \leq L_{ute}^{\max} \gamma_v, \quad (50)$$

$$u = 1, \dots, U, t = 1, \dots, T, v = 1, \dots, Y,$$

em que,

- $L_{ute}^{\max}$  demanda máxima de energia no subsistema  $e$  durante o patamar  $u$  do estágio  $t$  (MWmédio);
- $\gamma_v$  intervalo da curva de custo de déficit em percentual da carga. De outra forma, esse valor deve assumir valores percentuais para os variados níveis de carga, de tal forma que  $\sum_{v=1}^Y \gamma_v = 1$ . Assim, se  $Y$  for igual a 4,  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  podem assumir os seguintes valores: como 0,05, 0,05, 0,10 e 0,80, respectivamente. Observe que a soma dos mesmos é igual a 1.

### 4.3.5 Representação das restrições de transmissão associadas à Itaipu

No problema do PMO, a usina de Itaipu é fisicamente representada no subsistema SE. No entanto, conforme mostrado na Figura 14, o sistema de transmissão do SIN permite que haja transporte de energia para as regiões SU e SE, por meio do nó fictício de Ivaiporã em 60 Hz, e diretamente ao subsistema Sudeste em 50 Hz. Nesse sentido, a geração de Itaipu é repartida em dois níveis: 60 Hz, totalmente direcionado para o lado brasileiro via Ivaiporã e; 50 Hz, em que também está incorporada a carga da *Administración Nacional de Electricidad* – ANDE (Paraguai). O excedente da produção em relação ao consumo paraguaio em 50 Hz, cerca de 90% do total para essa referida frequência, é transmitido para o Brasil diretamente para o subsistema Sudeste.

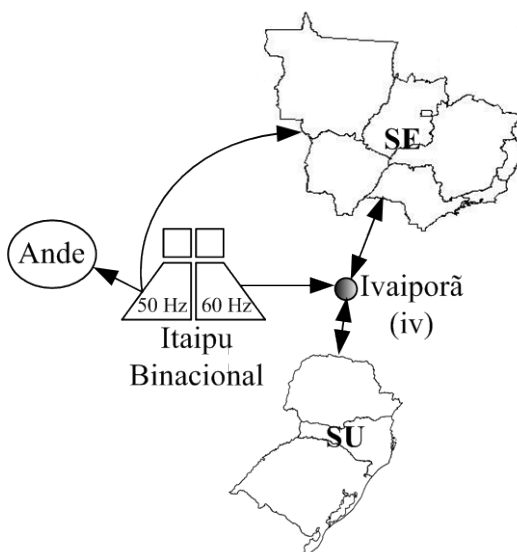


Figura 14. Interligação entre Itaipu e as regiões SE e SU.

Com base nos aspectos expostos, é necessário inserir ao modelo matemático uma restrição adicional que visa, essencialmente, representar o balanço de potência (ou energia) no nó de Ivaiporã, conforme exposto abaixo.

$$f_{iv,sul} + f_{iv,se} = gh_{itaipu\ 60Hz} + f_{sul,iv} + f_{se,iv}, \quad (51)$$

em que,

$$f_{iv,sul} \leq f_{iv,sul}^{\max}, \quad (52)$$

$$f_{sul,iv} \leq f_{sul,iv}^{\max}, \quad (53)$$

$$f_{iv,se} \leq f_{iv,se}^{\max}, \quad (54)$$

$$f_{se,iv} \leq f_{se,iv}^{\max}. \quad (55)$$

Vale mencionar que no modelo computacional, o excedente de geração 50 Hz disponível para o uso brasileiro pode ser subtraído da demanda do subsistema Sudeste, sem a necessidade de restrições elétricas adicionais, respeitando, contudo, os limites de intercâmbio.

#### 4.3.6 Acoplamento com o Planejamento Anual da Operação

A integração entre as diferentes etapas do planejamento, dada por meio de uma FCF, permite que os modelos mais próximos da operação em tempo real estabeleçam políticas operativas com base nos estudos previamente realizados nas etapas com horizontes mais extensos (a ideia consiste em sempre otimizar em todas as etapas considerando o horizonte de planejamento da etapa de longo prazo; ou seja, cinco anos). Desse modo, existe uma coordenação entre as etapas.

Tendo em vista que o foco é o acoplamento entre o PEN e o PMO, na sequência é apresentada a estrutura da FCF resultante do modelo NEWAVE com algumas simplificações de modelagem por razões didáticas.

$$\alpha_T - \sum_{e=1}^E \frac{\partial \alpha_T}{\partial ea_e} ea_e \geq \alpha_T^* + \sum_{g=1}^G \frac{\partial \alpha_T}{\partial eaf_{e,T-g}} eaf_{e,T-g}, \quad (56)$$

em que,

$\alpha_T$  custo futuro (R\$);

$G$  ordem máxima do modelo auto-regressivo considerado no

- modelo NEWAVE;
- $\alpha^*$  valor constante associado à  $c$ -ésima aproximação linear da FCF;
- $ea_e$  energia armazenada no  $e$ -ésimo subsistema (MWmed). O cálculo da energia armazenada considera os níveis de armazenamento dos reservatórios e o somatório das produtividades de todas as usinas por onde a água deverá fluir até desembocar no oceano (calculada com base na altura equivalente das usinas), conforme:  $ea = \sum_{i=1}^{I_e} v_i \bar{p}_i$ , em que  $\bar{p}_i$  é a produtividade acumulada do reservatório  $i$ , calculada para a altura equivalente (CEPEL, 2010a). Matematicamente, a produtividade acumulada corresponde ao somatório do produto entre a produtibilidade específica ( $\text{MW}/\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$ ) e a altura (m) da usina  $i$  e todas as usinas a jusante desta. A altura, por sua vez, é função dos níveis de montante e jusante do reservatório (m) e das perdas (m). Detalhes com respeito ao cálculo da energia armazenada são apresentados no Apêndice C;
- $g$  índice associado à ordem do modelo auto-regressivo utilizado no NEWAVE;
- $ea_f$  energia afluente no  $e$ -ésimo subsistema (MWmes). Esses valores são dados de entrada do problema. É importante comentar que para o cálculo da energia afluente para o primeiro mês de estudo do PMO (dividido em semanas), é considerado um valor médio que leva em consideração o número de dias que pertencem ao mês de estudo, bem como a quantidade de horas de cada estágio. Alguns aspectos com relação ao cálculo da energia afluentes são também apresentados no Apêndice C.

Observe que a desigualdade (56) é função da energia armazenada nos subsistemas em decorrências das características do modelo NEWAVE. Entretanto, o problema do PMO modela as usinas de forma individualizada requisitando, então, ajustes (desagregar a representação por reservatórios equivalentes de energia por subsistema para reservatórios individuais) a essa FCF advinda do NEWAVE de tal forma que seja possível utilizá-la nos estudos de interesse deste trabalho, como destacado a seguir:

$$\alpha_T - \sum_{i=1}^I \left[ \frac{\partial \alpha_T}{\partial v_i} \right]_r v_i \geq \alpha_r^0, r = 1, \dots, R, \quad (57)$$

em que,

$\alpha^0$  coeficiente afim da FCF.

Para obter a desigualdade (57), é necessário aplicar a regra da cadeia, conforme detalhado em (58), em que um único reservatório equivalente de energia é considerado.

$$\frac{\partial \alpha_T}{\partial v_i} = \frac{\partial \alpha_T}{\partial ea} \frac{\partial ea}{\partial v_i}. \quad (58)$$

Dado que a energia armazenada é função do volume dos reservatórios das usinas e da produtividade calculada para a altura equivalente do reservatório de todas as usinas a jusante pertencente ao mesmo subsistema (vide Apêndice C), é possível escrever que:

$$\frac{\partial ea}{\partial v_i} = \sum_{i \in \Xi_i} \rho_i, \quad (59)$$

em que,

$\Xi_i$  é o conjunto formado pela  $i$ -ésima usina e todas aquelas à jusante dela em um dado subsistema;

$\rho_i$  é a produtividade individual da  $i$ -ésima usina hidrelétrica, calculada para a altura equivalente.

Consequentemente, a partir de (58)-(59) e tendo em vista que  $\frac{\partial \alpha_T}{\partial ea}$  advém da FCF do NEWAVE, tem-se:

$$\frac{\partial \alpha_T}{\partial v_i} = \frac{\partial \alpha_T}{\partial ea} \sum_{i \in \Xi_i} \rho_i. \quad (60)$$

Então, a partir deste momento, a FCF resultante será representada como segue:

$$\alpha_T - \sum_{i \in I} \gamma_{ir} v_i \geq \alpha_r^0, r = 1, \dots, R, \quad (61)$$

em que,

$$\gamma = \frac{\partial \alpha_T}{\partial v}. \quad (62)$$

#### 4.3.7 Representação das usinas de bombeamento

As unidades elevatórias são usinas de bombeamento que têm a incumbência de retirar água de um reservatório a jusante e enviar para outro a montante. Tal procedimento pode resultar em um ganho da energia armazenada, pois o curso normal da água é desviado para uma bacia e/ou usina com maior queda quando comparado com a localização original. A Figura 15 ilustra quatro usinas hidrelétricas localizadas em duas diferentes cascatas e uma usina de bombeamento, que bombeia água da usina 4 localizada a jusante na cascata 2, para a usina 1 localizada a montante na cascata 1.

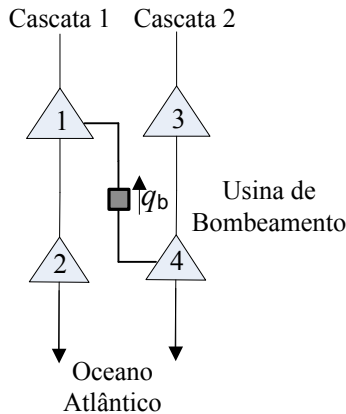


Figura 15. Representação de uma usina de bombeamento.

A representação matemática dessa característica interfere diretamente na equação de conservação da massa d'água. Por exemplo, imagine que a usina de bombeamento destacada na Figura 15 bombeie

$q_b \text{ hm}^3$  da usina 4 para a usina 1. As equações de balanço para ambas as usinas hidrelétricas, 1 e 4, podem ser visualizadas por (63) e (64), respectivamente.

$$v_{1,t+1} - v_{1t} + q_{1t} + sp_{1t} = y_{1t} + q_{bt}, \quad (63)$$

$$v_{4,t+1} - v_{4t} + q_{4t} + sp_{4t} - q_{3t} - sp_{3t} = y_{4t} - q_{bt}. \quad (64)$$

Além disso, deve-se considerar o consumo de energia pelas unidades de bombeamento na restrição de atendimento à demanda. Para tanto, é necessário acrescê-lo por patamar de carga a demanda do subsistema em que a mesma está localizada, como (65).

$$\sum_{j=1}^J g_{jut}^{\omega_t} + \sum_{i=1}^I gh_{iut}^{\omega_t} + \sum_{l \in \Gamma_e} f_{leut}^{\omega_t} + \sum_{v=1}^V d_{vuet}^{\omega_t} = L_{uet} + \kappa q_{bt}^{\omega_t} \delta_{ut}, \quad (65)$$

$$t = 1, \dots, T, \quad u = 1, \dots, U,$$

em que,

$\kappa$  consumo específico da unidade de bombeamento (MWmed/m<sup>3</sup>/s).

### 4.3.8 Função de Produção das Usinas Hidrelétricas

Conforme comentado no Capítulo 1, algumas simplificações são inseridas na modelagem do problema do PMO que visam tratar, entre outros aspectos, as não linearidades características do problema do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos. Destaca-se nesse sentido, a FPH.

A FPH é representada por uma função não linear que relaciona a altura de queda líquida, os rendimentos das unidades de geração e a vazão turbinada da usina, de forma similar a apresentada por Finardi e da Silva (2006). Desse modo, além das questões estocásticas, é também necessário incorporar as peculiaridades associadas à produção das usinas hidrelétricas no problema do planejamento de tal forma que torne possível a solução do problema em um tempo computacional aceitável.

Nesse contexto, uma possibilidade seria considerar constante a altura de queda ao longo do horizonte de planejamento. No entanto, tal

fato traria uma representação equivocada, uma vez que a altura de queda varia consideravelmente, em grande parte das usinas, ao longo do período estudado. Portanto, com o intuito de reproduzir a variação da produtibilidade sem a necessidade de utilizar um modelo não linear, Cunha *et al.* (1997) propuseram uma aproximação linear para a FPH, a qual vem sendo foco de outros estudos atualmente (DINIZ e MACEIRA, 2008).

O objetivo é encontrar uma aproximação de Taylor de primeira ordem da FPH com os mínimos desvios com relação aos valores da função exata. O resultado é, portanto, uma função linear por partes dependente do volume armazenado nos reservatórios, da vazão turbinada e da vazão vertida para cada usina hidrelétrica do sistema. Atualmente, a FPH modelada no DECOMP é somente função da vazão defluente (soma da vazão turbinada e vertida) e volume do reservatório. Assim, restrições adicionais de defluência, vazão turbinada e de volume total disponível são também inseridas ao modelo com o intuito de viabilizar a incorporação dessa estratégia (CEPEL, 2010a).

Na modelagem proposta deve-se mapear um número suficiente de pontos de operação, pois, a priori, não se sabe qual o real ponto de operação da usina durante cada estágio do horizonte de estudo, e, conseqüentemente, evitar possíveis inviabilidades na solução e/ou na operação das usinas. Na Figura 16 está ilustrada a FPH não linear de uma usina integrante do SIN.

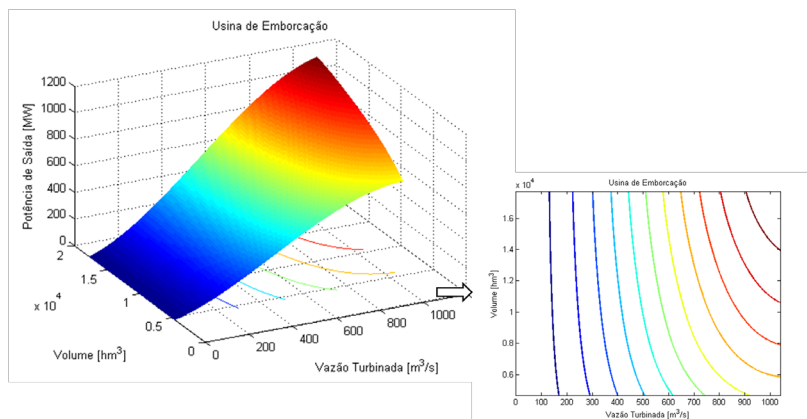


Figura 16. Função de produção de uma usina hidrelétrica integrante do SIN.



Observe que a FPH não é côncava em todo o seu domínio, fato que dificulta a sua representação por uma função linear por partes. Então, a ideia inicial é construir uma envoltória côncava tangente, no máximo de pontos possíveis, à FPH original. A envoltória representa um subconjunto de planos tangentes à FPH para valores específicos de volume armazenado, conforme Figura 17.

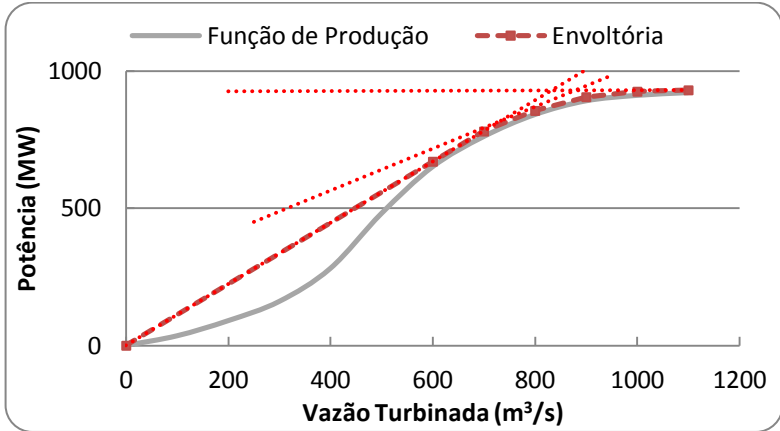


Figura 17. Envoltória côncava tangente à FPH considerando um valor específico no volume do reservatório e desprezando vazão vertida.

Para construir uma envoltória côncava linear por partes, faz-se necessário utilizar aproximações de Taylor de primeira ordem. Primeiramente, alguns pontos do domínio da função são escolhidos levando em consideração algumas particularidades operativas das usinas, desprezando-se, no primeiro momento, a variável de vazão vertida; ou seja,  $sp$  igual a zero. Assim, um conjunto de hiperplanos resultante pode ser representado por (66).

$$\begin{aligned}
 gh_{it}(v_{it}, q_{it}) &\leq gh_{it}^n(v_{it}^n, q_{it}^n) + \frac{\partial gh_{it}}{\partial v_{it}}(v_{it}^n, q_{it}^n)(v_{it} - v_{it}^n) \\
 &+ \frac{\partial gh_{it}}{\partial q_{it}}(v_{it}^n, q_{it}^n)(q_{it} - q_{it}^n), \quad n = 1, N,
 \end{aligned} \tag{66}$$

em que,

$N$  número total de pontos da função, os quais são considerados

- para o cálculo das aproximações lineares da FPH;
- $n$  índice relacionado com a “grade” de discretização, isto é, pontos da função exata onde são construídas as aproximações lineares da FPH.

Nessa etapa do processo, é imprescindível observar se os pontos escolhidos estão na região convexa da função de produção original, de modo a evitar inviabilidades numéricas no modelo. Caso alguns dos pontos escolhidos estejam na região convexa, os mesmos podem ser desprezados na continuidade do processo, sendo substituídos por aproximações lineares construídas para pontos pertencentes à região côncava.

Em vista disso, pode-se perceber que a envoltória da Figura 17 (função aproximada) apresenta uma estimativa otimista da energia produzida quando comparado com o valor exato da função original. Nesse contexto, a sequência do processo visa minimizar o erro médio quadrático entre a função original e a função aproximada (ainda desprezando o vertimento). Desse modo, o fator de correção escalar que minimiza o erro médio quadrático pode ser representado da seguinte forma:

$$\sigma_{in} = \frac{\sum_{\chi=1}^X \left[ FPH(v_{it}^{\chi}, q_{it}^{\chi}) \cdot gh(v_{it}^{\chi}, q_{it}^{\chi}) \right]}{\sum_{\chi=1}^X \left[ FPH(v_{it}^{\chi}, q_{it}^{\chi}) \right]^2}, \quad (67)$$

em que,

- $\sigma_{in}$  fator de correção escalar que reduz o erro médio quadrático entre a função de produção exata e a aproximada;
- $X$  quantidade total de pontos utilizados no cálculo do erro médio quadrático;
- $\chi$  índice associado aos pontos utilizados no cálculo do erro médio quadrático.

Portanto, a função aproximada corrigida por ser expressa da seguinte maneira:

$$gh_{corrigida}(v_{it}^n, q_{it}^n) = \sigma_{in} gh(v_{it}^n, q_{it}^n). \quad (68)$$

Finalizada a primeira parte do processo, o passo seguinte consiste em encontrar para o par  $(v_{it}, q_{it})$ ,  $m_{sp}$  valores de vertimento para cada usina, evitando valores elevados de vertimento para volumes próximos dos valores mínimos. De posse desses valores, deve-se calcular o coeficiente linear que multiplique a variável de vazão vertida de modo que o erro médio quadrático seja o mínimo possível. De outro modo, a função de produção aproximada deve ser também função do vertimento,

$$gh_{it}(v_{it}^n, q_{it}^n, sp_{it}^n) = gh_{it}(v_{it}^n, q_{it}^n) + \tau_i^n sp_{it}^n, \quad (69)$$

em que,

$$\tau_i^n = \arg \min_{\tau} \left[ \frac{1}{m_{sp}} \sum_{k=1}^{m_{sp}} \left( FPH(v_{it}^n, q_{it}^n, sp_{it}^k) \right) - \left( gh_{it}(v_{it}^n, q_{it}^n) + \tau sp_{it}^k \right)^2 \right], \quad (70)$$

e

$$sp_{it}^k = \left( \frac{k}{m_{sp}} \right) sp_{it}^{ref}, \quad (71)$$

em que,

- $m_{ps}$  número de pontos de vertimento escolhidos;
- $k$  índice relacionado com o número de pontos de vertimento escolhidos.

O valor  $sp_{it}^{ref}$  é o máximo valor aceitável para o par  $(v_{it}, q_{it})$ .

Vale comentar que algumas heurísticas estão envolvidas nesse processo, em decorrência da grande quantidade de usinas hidrelétricas integrantes do SIN, as quais apresentam características operativas distintas.

Assim, a FPH linear por partes pode ser representada de acordo com (72).

$$\begin{aligned}
& gh_{it}(v_{it}, q_{it}, sp_{it}) \leq \sigma_{in} gh_{it}^n(v_{it}^n, q_{it}^n, sp_{it}^n) \\
& + \sigma_{in} \frac{\partial gh_{it}}{\partial v_{it}}(v_{it}^n, q_{it}^n, sp_{it}^n)(v_{it} - v_{it}^n) \\
& + \sigma_{in} \frac{\partial gh_{it}}{\partial q_{it}}(v_{it}^n, q_{it}^n, sp_{it}^n)(q_{it} - q_{it}^n) + \gamma_i^n sp_{it}, \\
& n = 1, N.
\end{aligned} \tag{72}$$

Na Figura 18 está ilustrado um exemplo de uma FPH linear por partes para partes de uma usina integrante do SIN. Note que as aproximações geradas para a usina de Emborcação produzem desvios quando comparados com a FPH original em alguns pontos observados como, por exemplo, próximos da vazão máxima e volumes elevados. Esse comportamento demonstra que mesmo com o estudo para melhor linearizar a FPH, a perfeita reprodução da FPH original pode ficar comprometida em alguns pontos.

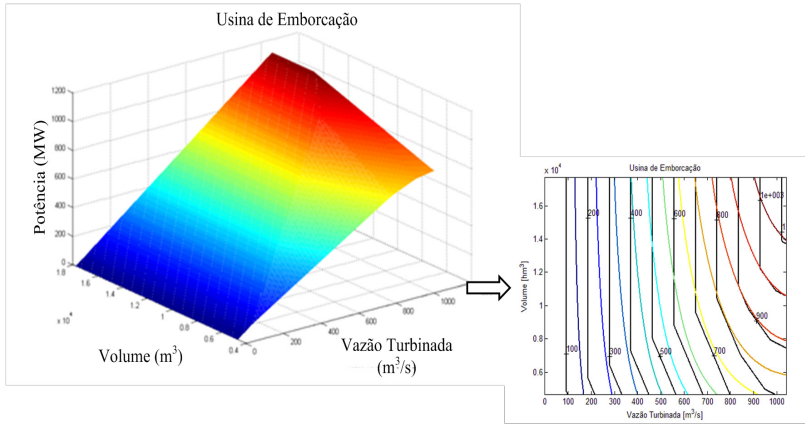


Figura 18. FPH linear por partes.

Nesse trabalho, em grande parte do estudo de casos, 15 pontos da FPH foram utilizados na construção da FPH linear por partes, resultando, portanto, em 15 restrições de desigualdades por usina do sistema.

#### 4.4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DO PMO

Baseado nas peculiaridades operativas apresentadas nas subseções acima, é possível escrever a formulação do problema do PMO com o específico conjunto de restrições e variáveis. Desse modo, na subseção seguinte é apresentada a formulação do ED a fim de nortear a formulação para os demais métodos, que são detalhados em seguida, de acordo com as características do PMO.

##### 4.4.1 Equivalente Determinístico

Seguindo a estrutura do problema (8), a formulação do ED em sua forma implícita do problema do PMO pode ser assim descrita.

- Função Objetivo

A função objetivo do problema visa minimizar o valor esperado do custo total de operação do sistema. Esse custo é composto pelo custo do combustível das usinas termelétricas ao longo do horizonte de planejamento  $T$ , bem como a penalidade de déficit, somado ao valor esperado do custo futuro  $\alpha_T$ , o qual é função dos armazenamentos dos reservatórios no final do horizonte  $T$ . Então, pode ser escrita como:

$$\text{Min } F = \sum_{t=1}^T \sum_{\omega \in \Omega_t} p_t^{\omega_t} \sum_{u \in U} \sum_{e \in E} \left( \sum_{j \in J_e} c_{t_{ju}} g_{t_{ju}}^{\omega_t} + \sum_{v=1}^Y c d_{v_{ueu}} d_{v_{uet}}^{\omega_t} \right) + \alpha_T \quad (73)$$

- Restrições de atendimento à demanda

$$\sum_{j=1}^J g_{t_{jut}}^{\omega_t} + \sum_{i=1}^I g h_{iut}^{\omega_t} + \sum_{l \in \Gamma_e} f_{l_{eut}}^{\omega_t} + \sum_{v=1}^Y d_{v_{uet}}^{\omega_t} = L_{uet}, \quad (74)$$

$t = 1, \dots, T, u = 1, \dots, U, \omega_t = 1, \dots, \Omega_t$

- Restrições de conservação da massa d'água

$$v_{it}^{\omega_t} - v_{i,t-1}^{\omega_{t-1}} + C \sum_u^U \left[ q_{iut}^{\omega_t} + sp_{iut}^{\omega_t} - \sum_{m \in M_i} \left( q_{mu,tv}^{\omega_t} + sp_{mu,tv}^{\omega_t} \right) \right] \delta_{ut} = C a_{it}^{\omega_t} \quad (75)$$

$$t = 1, \dots, T, \omega_t = 1, \dots, \Omega_t.$$

em que,

$tv$  refere-se o tempo de viagem da água entre usinas. Em geral, é menor que uma semana e, portanto, pode ser considerado no mesmo estágio. Contudo, caso seja diferente da duração do estágio  $t$ , deve ser incorporado no estágio seguinte. Ainda é possível considerá-lo caso seja bastante significativo quando relacionado com o estágio do horizonte de estudo.

- Função de produção linear por partes

$$gh_{iut}^{\omega_t} (v_{it}^n, q_{it}^n, sp_{it}^n) \leq \sigma_{in} gh_{iut}^{\omega_t, n} (v_{it}^n, q_{it}^n, sp_{it}^n) \\ + \sigma_{in} \frac{\partial gh_{iut}^{\omega_t, n}}{\partial v_{it}} (v_{it}^n, q_{it}^n, sp_{it}^n) (v_{it}^{\omega_t} - v_{it}^n) \\ + \sigma_{in} \frac{\partial gh_{iut}^{\omega_t, n}}{\partial q_{it}} (v_{it}^n, q_{it}^n, sp_{it}^n) (q_{iut}^{\omega_t} - q_{it}^n) + \gamma_i^n sp_{iut}^{\omega_t}, \quad (76)$$

$$n = 1, N, u = 1, \dots, U, i \in I.$$

Tal função linear por partes é resultante do processo de linearização da função de produção original, conforme apresentado na Seção 4.3.8.

- Função de Custo Futuro

$$\alpha_T - \sum_{\omega \in \Omega_T} \sum_{i \in I} \gamma_{ir} v_{it}^{\omega_r} \geq \alpha_r^0, i = 1, \dots, I, r = 1, \dots, R, t = T. \quad (77)$$

O custo futuro representa o custo total esperado do estágio  $T+1$  em diante (até o horizonte considerado no modelo NEWAVE). Neste ponto do texto, convém antecipar que tais restrições são incluídas somente nos subproblemas associados ao último estágio  $T$  nos métodos

apresentados a seguir. A FCF é um dado de entrada do problema do PMO, advindo do PEN e, portanto, tal função permite comparar as decisões operativas no presente e suas consequências futuras, conforme comentado anteriormente.

- Limites de intercâmbio entre sistemas

$$f_{leut}^{\min} \leq f_{leut}^{\omega_t} \leq f_{leut}^{\max}, u = 1, \dots, U, t = 1, \dots, T, l \in \Gamma_e. \quad (78)$$

- Limites de armazenamento no  $i$ -ésimo reservatório

$$v_i^{\min} \leq v_{it}^{\omega_t} \leq v_i^{\max}, i \in I, \forall t = 1, \dots, T. \quad (79)$$

- Limites de vazão turbinada no  $i$ -ésimo aproveitamento

$$0 \leq q_{iut}^{\omega_t} \leq q_i^{\max}, i \in I. \quad (80)$$

- Limites de geração hidrelétrica e termelétrica

$$\begin{aligned} 0 &\leq g t_{jut}^{\omega_t} \leq g t_j^{\max}, j \in J, \\ 0 &\leq g h_{iut}^{\omega_t} \leq g h_i^{\max}, i \in I, \\ &\forall t = 1, \dots, T. \end{aligned} \quad (81)$$

Nessa formulação, foi desprezado o limite máximo de vazão vertida. Contudo, na prática, esses limites são modelados por razões operativas e/ou construtivas da usina.

#### 4.4.2 Decomposição Aninhada

Nesta subseção, o intuito consiste em apresentar as principais diferenças entre a formulação de um específico subproblema correspondente ao nó  $\omega_t$  e aquelas destacada acima. Também é destacada a modelagem matemática dos corte de Benders, desprezando, nesse momento, os limites das variáveis. Assim:

$$\begin{aligned}
\text{Min } F &= p_t^{\omega_t} \sum_{u \in U} \sum_{e \in E} \left( \sum_{j \in J_e} c t_{ju} g t_{jut}^{\omega_t} + \sum_{v=1}^Y c d_{\vee eu} d_{\vee uet}^{\omega_t} \right) + \alpha_{t+1}, \quad (82) \\
s.a : \sum_{j=1}^J g t_{jut}^{\omega_t} + \sum_{i=1}^I g h_{iut}^{\omega_t} + \sum_{l \in \Gamma_e} f_{leut}^{\omega_t} + \sum_{v=1}^Y d_{\vee eut}^{\omega_t} &= L_{eut}, \\
v_{it}^{\omega_t} + C \sum_u \left[ q_{iut}^{\omega_t} + s p_{iut}^{\omega_t} - \sum_{m \in M_i} (q_{mu,tv}^{\omega_t} + s p_{mu,tv}^{\omega_t}) \right] \delta_{ut} &= C a_{it}^{\omega_t} + v_{i,t}^{\omega_t} \\
g h_{iut}^{\omega_t} (v_{it}^n, q_{it}^n, s p_{it}^n) &\leq \sigma_{in} g h_{iut}^{\omega_t, n} (v_{it}^n, q_{it}^n, s p_{it}^n) \\
+ \sigma_{in} \frac{\partial g h_{iut}^{\omega_t, n}}{\partial v_{it}} (v_{it}^n, q_{it}^n, s p_{it}^n) (v_{it}^{\omega_t} - v_{it}^n) & \\
+ \sigma_{in} \frac{\partial g h_{iut}^{\omega_t, n}}{\partial q_{it}} (v_{it}^n, q_{it}^n, s p_{it}^n) (q_{iut}^{\omega_t} - q_{it}^n) + \gamma_i s p_{iut}^{\omega_t}, & \quad (83) \\
\alpha_{t+1} + \sum_{i \in I} \sum_{\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_t)} \left( \frac{p_{t+1}^{\omega_{t+1}}}{p_t^{\omega_t}} \right) \pi_{i,t+1}^{\omega_{t+1} \top} v_{it}^{\omega_t} &\geq \sum_{\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_t)} \left( \frac{p_{t+1}^{\omega_{t+1}}}{p_t^{\omega_t}} \right) F_{t+1}^{\omega_{t+1} *} \\
+ \sum_{i \in I} \sum_{\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_t)} \left( \frac{p_{t+1}^{\omega_{t+1}}}{p_t^{\omega_t}} \right) \pi_{i,t+1}^{\omega_{t+1} \top} v_{it}^{\omega_t *} &, \quad t = 1, \dots, T, u = 1, \dots, U.
\end{aligned}$$

Note que a decisão no nó atual depende das decisões dos nós antecessores, e, portanto, o volume ao final de cada realização depende do volume final da realização imediatamente anterior à realização  $\omega_t$ , de maneira similar ao ED.

Para os subproblemas de último estágio, não existem cortes de Benders associados, sendo consideradas apenas as FCFs, (77). Ademais, vale lembrar que quando se considera na modelagem do problema o tempo de viagem d'água entre diferentes aproveitamentos, a estrutura das equações recursivas é alterada, tendo em vista a necessidade de considerar outras variáveis de estado no problema. Tal modelagem é apresentada no Apêndice D.

#### 4.4.3 Progressive Hedging

A seguir é apresentada a formulação de um subproblema correspondente a um cenário  $s$  resultante da decomposição via o método de PH (esquema alternativo proposto neste trabalho), também sendo desconsiderados os limites das variáveis do problema. O objetivo é



apenas dar uma ideia da modelagem da função objetivo e das restrições de um problema associado a um determinado cenário  $s$ .

$$\begin{aligned} \min \Lambda^s = & p^s \left[ \sum_{t=1}^T \sum_{e \in E} \left( \sum_{j \in J_e} \sum_{u=1}^U \left( ct_{ju} g_{jut}^s + \sum_{v=1}^V cd_{vue} d_{vue}^s \right) \right) + \alpha_T^s \right] \\ & + p^s \left[ \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{i=0}^I \pi_{it}^s (v_{it}^s - \bar{v}_{it}^s) \right] + p^s \left[ \frac{1}{2} \mu \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{i=1}^I \left( \|v_{it}^s - \bar{v}_{it}^s\|^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.: } & \sum_{j \in J_e} g_{jut}^s + \sum_{i \in I_e} g_{iut}^s + \sum_{l \in \Gamma_e} f_{leut}^s + \sum_{v=1}^V d_{vue}^s = L_{eut}^s, \\ & v_{it}^s - v_{i,t-1}^s + C \sum_{u=1}^U \left[ q_{iut}^s + sp_{iut}^s - \sum_{m \in M_i} \left( q_{mu,tv}^s + sp_{mu,tv}^s \right) \right] = Ca_{it}^s, \\ & gh_{iut}^s \leq gh_{iut}^{sn} (v_i^n, q_i^n, sp_i^n) + \frac{\partial gh_{iut}^s}{\partial v_{iu}^s} (v_i^n, q_i^n, sp_i^n) (v_{it}^s - v_i^n) \\ & + \frac{\partial gh_{iut}^s}{\partial q_{iu}^s} (v_i^n, q_i^n, sp_i^n) (q_{iut}^s - q_i^n) \\ & + \frac{\partial gh_{iut}^s}{\partial sp_{iu}^s} (v_i^n, q_i^n, sp_i^n) (sp_{iut}^s - sp_i^n), \\ & \alpha_T^s - \sum_{i \in I} \gamma_{ir} v_{iT}^s \geq \alpha_r^0, r = 1, \dots, R. \\ & t = 1, \dots, T, e = 1, \dots, E, u = 1, \dots, U, i = 1, \dots, I. \end{aligned} \quad (85)$$

É conveniente comentar que o tempo de viagem da água não tem um impacto direto no algoritmo de solução do método de PH. Deve-se, contudo, observar durante a implementação do algoritmo, o estágio adequado em que devem ser incrementadas as vazões afluentes a um determinado reservatório advinda daqueles localizados à montante na cascata. Ou seja, há uma maior facilidade de programação quando comparado com a DA.

## 4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, as principais características operativas consideradas nos modelos computacionais desenvolvidos e seus impactos na formulação do problema foram apresentados. Em especial,

podem-se destacar os aspectos associados à FPH, o acoplamento com o modelo NEWAVE, as restrições que envolvem Itaipu, a representação do déficit de energia por meio de uma curva linear por partes, entre outros.

Com base nessas características, a formulação do ED do problema do PMO foi apresentada em detalhes. Em seguida, os subproblemas resultantes da aplicação dos métodos de decomposição estudados neste trabalho foram detalhados, destacando as algumas diferenças entre os mesmos.

Nesse sentido, vale comentar o impacto de algumas características operativas do sistema no algoritmo dos métodos. Por exemplo, a representação do tempo de viagem d'água entre distintos aproveitamentos, torna a implementação da DA mais complexa, quando comparada com o método de PH.

Com base nesses aspectos, no capítulo a seguir é efetuado um estudo de casos onde são analisadas as diversas características dos algoritmos de solução.

## **CAPÍTULO 5**

### **RESULTADOS COMPUTACIONAIS**

---

#### **5.1 INTRODUÇÃO**

O estudo de casos proposto neste trabalho tem o objetivo inicial de propiciar uma análise detalhada do desempenho computacional das diferentes estratégias de decomposição via o método de PH apresentadas no Capítulo 3, de acordo com os seguintes aspectos: (a) distintos valores de parâmetro de penalidade; (b) métodos heurísticos para atualização iterativa do parâmetro de penalidade; (c) técnicas de partida quente. Em seguida, de acordo com os resultados deste estudo preliminar, aquela estratégia via PH com melhor desempenho é, então, comparada com o método atualmente vigente no Brasil, a DA, analisando os respectivos tempos computacionais e as divergências entre as políticas resultantes de ambos os métodos.

Para tanto, o SIN é utilizado como plataforma de testes, o qual é atualmente composto por aproximadamente 130 usinas hidrelétricas e 80 usinas termelétricas em operação. Os modelos computacionais desenvolvidos e seus resultados usados nas discussões subsequentes contemplam grande parte das características modeladas no DECOMP (*software* atualmente utilizado pelos agentes), entre as quais estão incluídas todas aquelas detalhadas no Capítulo 4. Vale comentar que a base de dados é exatamente igual à utilizada nos estudos que envolvem o PMO nos dias atuais. Dito de outro modo, as informações disponíveis

nos "Decks" do PMO (conjunto de arquivos correspondentes aos dados de entrada do modelo DECOMP disponibilizado pelos órgãos responsáveis do SEB) são usadas como dados de entrada dos modelos computacionais desenvolvidos.

No estudo de casos, dois PMOs com características distintas (Janeiro e Junho de 2009), no que concerne ao período hidrológico, são utilizados (Janeiro corresponde ao período úmido e Junho ao período seco).

De forma resumida, esse estudo é dividido em três etapas: (i) os resultados dos meses de Janeiro e Junho de 2009 são avaliados com os modelos desenvolvidos seguindo as premissas atualmente consideradas no PMO; (ii) também para os mesmos meses, os resultados dos modelos desenvolvidos são analisados considerando árvores de cenários com um maior número de realizações semanais; (iii) por fim, o desempenho dos métodos em função do aumento do horizonte de planejamento é observado e discutido.

Também são avaliados os desempenhos dos métodos quando são utilizadas as implementações paralelas dos algoritmos.

## 5.2 CARACTERÍSTICAS GERAIS DO SISTEMA HIDROTÉRMICO

O sistema hidrotérmico teste utilizado neste trabalho corresponde ao SIN. Na Figura 19 a seguir está ilustrado o sistema brasileiro, destacando-se o acoplamento hidráulico entre diferentes usinas hidrelétricas, além das longas linhas de transmissão existentes.



Figura 19. Sistema Interligado Nacional.

Fonte: Operador Nacional do Sistema - ONS (2010).

Note que há uma concentração dos recursos de geração na região Sul e Sudeste. Adicionalmente, existem longas linhas de transmissão que são realmente relevantes devido à existência da complementaridade hidrológica entre os distintos subsistemas.

Com relação à capacidade de geração atual fiscalizada pela Aneel, as usinas hidrelétricas são responsáveis por aproximadamente 80 GW e as usinas termelétricas por quase 32 GW. Essas fontes de geração somadas a outras fontes alternativas com participação reduzida na

matriz energética (vide Figura 1) são responsáveis por atender a demanda em sua totalidade nas diversas regiões do país, respeitando os aspectos técnicos e econômicos.

Convém reforçar que todos os dados relativos às usinas, aos intercâmbios de energia, demandas por subsistema, vazões afluentes, entre outros, estão disponíveis nos arquivos de dados referentes ao PMO, disponibilizados pelo ONS e CCEE, permitindo, assim, o desenvolvimento de outros modelos, como o proposto neste trabalho. As características específicas de cada PMO, como por exemplo, as árvores de cenários dos modelos estocásticos, são discutidas adiante no documento.

### 5.3 ESTUDO DE CASOS

O estudo de casos tem o propósito de avaliar, sobretudo, o desempenho computacional dos modelos desenvolvidos para ambos os métodos de decomposição detalhados no Capítulo 3. Para tanto, os PMOs dos meses de Janeiro e Julho de 2009 são utilizados, os quais estão associados a árvores de cenários de tamanhos distintos. A apresentação dos resultados desse estudo foi dividida basicamente em dois casos.

No Caso 1, os aspectos metodológicos relacionados com o método de PH são abordados. Inicialmente, ambos os esquemas de decomposição apresentados na Seção 3.3.2 são analisados de forma comparativa, quando diferentes heurísticas são utilizadas no que diz respeito à escolha do parâmetro de penalidade. Em seguida, a comparação é feita no âmbito da programação de alto desempenho. A ideia consiste em avaliar o ganho incremental de desempenho em função do aumento do número de processadores por meio da programação paralela. Diante de tais resultados, tem-se o propósito de avaliar também o comportamento de ambos os esquemas de decomposição quando utilizados na resolução de um problema com um horizonte de planejamento superior ao atualmente considerado; ou seja, em um problema com milhões de variáveis e restrições. Por fim, as técnicas de partida quente são testadas na última subseção. Vale comentar que os resultados das políticas, tais como, geração termelétrica, geração hidrelétrica e CMOs, são também explorados.

De acordo com os resultados do Caso 1, a estratégia de decomposição via o método de PH com melhor desempenho é então comparada com a DA no Caso 2. Nesse sentido, além dos estudos com

relação à árvore de cenários do modelo estocástico utilizado no DECOMP e horizontes de planejamento mais extensos, casos com diversas realizações semanais são também analisados. Assim, tem-se a possibilidade de avaliar o impacto de considerar incertezas também nas semanas do primeiro mês de estudo. Adicionalmente, a sensibilidade dos modelos quanto ao número de aproximações lineares utilizadas para representar a FPH é observada para ambos os métodos. De forma análoga ao Caso 1, também são apresentados alguns resultados da política de geração e os CMOs dos métodos de decomposição.

Antes de iniciar a discussão dos resultados, é conveniente comentar que todos os modelos de PL, assim como os problemas de Programação Quadrática - PQ resultantes do método de PH, são solucionados por meio do software comercial ILOG CPLEX 11.2. Para tanto, foi utilizado um processador Intel Xeon X5680 3.33 GHz (dois processadores) com 32 Gb de memória RAM para execução dos modelos. A linguagem de programação empregada foi orientada a objetos (STROUSTRUP, 1997), C++, tendo como compilador o *Compaq Visual C++ Professional Edition 9.0*.

### **5.3.1 Caso 1 - Avaliação dos aspectos metodológicos do método de *Progressive Hedging***

Conforme introduzido anteriormente, o problema do PMO tem algumas peculiaridades na modelagem, entre as quais se destacam a representação das incertezas.

Em particular, na árvore de cenários do modelo atualmente utilizado pelo ONS, as incertezas com relação às vazões afluentes aos reservatórios do sistema são modeladas somente no último estágio do horizonte de estudo, que está associado ao segundo mês, como ilustrado na Figura 12. Nesse contexto, antes de apresentar o estudo de casos, é imprescindível mostrar os detalhes no que diz respeito aos PMOs analisados neste trabalho. Vale ressaltar que nos estudos associados ao PMO as semanas iniciam no Sábado. Assim, nas RV0 todas as semanas do mês inicial são consideradas no estudo. Na medida em que as semanas vão passando, as novas revisões para o mesmo PMO vão sendo efetuadas com atualização dos dados, chamadas então de Revisões 1 (RV1), Revisões 2 (RV2), e, assim, sucessivamente.

Na Tabela 6 a seguir estão resumidas as características da RV0 dos meses de Janeiro e Junho.

**Tabela 6. Dados das RV0 dos PMOs usados no estudo de casos.**

Mês	Semanas	Total de Estágios	Número de Cenários
Janeiro	6	7	116
Junho	5	6	513

Note que há uma diferença no número de cenários nos meses de Janeiro e Junho. Tal diferença se deve a um estudo efetuado para todos os meses do ano conjuntamente com o desenvolvimento do modelo Gevazp (CEPEL, 2002), no qual foi investigado o número ideal de cenários que representasse da melhor maneira possível a distribuição de probabilidade de cada um dos meses, considerando um número máximo de 1.000 cenários.

De forma complementar a essas informações, nas Figuras 20 e 21 estão apresentados os valores das médias e dos desvios padrões das vazões afluentes considerando os cenários nos PMOs de 2009 para todas as usinas do sistema teste.

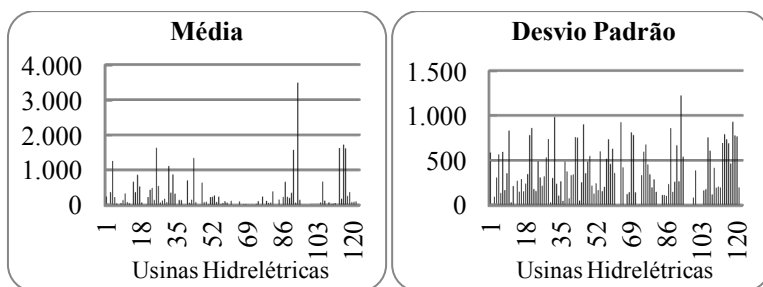


Figura 20. Média e desvio padrão para o mês de Janeiro em  $\text{m}^3/\text{s}$ .

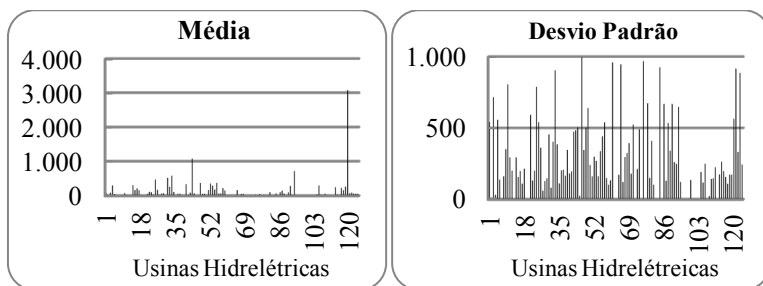


Figura 21. Médio e desvio padrão para o mês de Junho em  $\text{m}^3/\text{s}$ .

Em linhas gerais, esses são os dados usados nos estudos subsequentes, ainda que, em alguns casos, mudanças na estrutura da



árvore de cenários sejam efetuadas a fim de incorporar novas realizações aos estágios existentes e/ou a novos estágios (extensão do horizonte de estudo).

A ideia fundamental deste caso consiste em avaliar comparativamente ambas as estratégias de decomposição via o método de PH. De antemão, os aspectos associados ao parâmetro de penalidade  $\mu$  são estudados, em decorrência de sua importância para o desempenho do método. Nesse sentido, é possível citar testes considerando distintos valores de  $\mu$ , além do uso de heurísticas para atualização iterativa dos mesmos. Em seguida, o algoritmo de programação paralela desenvolvido para o método de PH é detalhado, sendo apresentados os resultados em função de sua implementação e os ganhos em relação ao algoritmo serial. Tendo em vista que a principal diferença entre os esquemas de decomposição está associada ao tamanho do problema dual resultante, na terceira etapa desse caso apresenta-se o estudo considerando um horizonte estendido, fato que provoca uma elevada diferença com relação ao número de variáveis do problema dual. Por fim, o impacto da utilização da solução obtida na RV0 como dado de entrada para a RV1 dos meses estudados é discutido; ou seja, o uso de técnicas de partida quente no contexto do PMO é investigado.

Nesse caso, além do tempo computacional, do número de iterações e do erro associado ao critério de convergência, são também comparados os resultados das variáveis primais e duais (CMOs) do problema. Aqui, é importante destacar que o número máximo de iterações é igual a 100 e o erro admissível  $\epsilon$  para o critério  $D_{iter}$  é igual a 100. Essa magnitude admissível para o erro é resultante de alguns estudos preliminares, os quais indicaram ser um critério bastante satisfatório para o número de cenários considerados neste trabalho. De forma a ratificar esse comentário, alguns resultados no que diz respeito os desvios entre as variáveis relaxadas e seus valores metas são também apresentados na sequência do documento.

#### *5.3.1.1 Parâmetros de penalidade*

Inicialmente, os estudos são relacionados com a influência do parâmetro de penalidade no desempenho dos esquemas de decomposição via o método de PH. Os resultados para ambos estão apresentados nas Tabelas 7 e 8, as quais correspondem aos meses de Janeiro e Junho, respectivamente.

**Tabela 7. Análise de diferentes parâmetros de penalidade no desempenho dos esquemas de decomposição - Janeiro.**

Decomposição	$\mu$	Tempo de CPU (h:m)	Iter	Função Objetivo (Bilhões \$)	$D_{iter}$
Clássica	100	04:09	100	58,106	349
	1	04:25	100	57,969	637
	0,01	04:41	100	57,934	540.214
Alternativa	100	03:37	100	58,115	181
	1	04:15	100	57,918	588
	0,01	04:23	100	57,894	294.653

**Tabela 8. Análise de diferentes parâmetros de penalidade no desempenho dos esquemas de decomposição - Junho.**

Decomposição	$\mu$	Tempo de CPU (h:m)	Iter	Função Objetivo (Bilhões \$)	$D_{iter}$
Clássica	100	17:16	100	35,289	774
	1	18:05	100	34,750	515
	0,01	19:09	100	34,741	279.005
Alternativa	100	17:02	100	35,159	252
	1	12:08	72	34,741	97
	0,01	17:47	100	34,739	104.938

De antemão, vale destacar as diferenças existentes entre os tamanhos dos problemas duais e subproblemas das estratégias de decomposição. No PMO de Janeiro, o problema dual resultante da Decomposição Clássica possui 8.694 variáveis e aquele resultante da Decomposição Alternativa proposta tem 738 variáveis. Por sua vez, em Junho, o problema dual apresenta 7.370 variáveis na Decomposição Clássica e 620 na Decomposição Alternativa. No que diz respeito aos subproblemas quadráticos, 10.851 variáveis e 41.378 restrições estão associadas ao mês de Janeiro e 9.451 variáveis e 33.480 restrições ao mês de Junho.

Diante esses números, é interessante observar a diferença existente entre os tempos computacionais dos PMOs destacados nas Tabelas 7 e 8, os quais são consideravelmente superiores no mês de Junho em virtude do maior número de cenários e/ou subproblemas associados ao mesmo, conforme destacado na Tabela 6.

Analisando comparativamente os esquemas de decomposição, pode-se afirmar que a Decomposição Alternativa apresentou, de uma maneira geral, os melhores resultados computacionais para os diferentes valores de  $\mu$ , uma vez que chegou mais próximo de atingir a convergência para o critério estabelecido ( $D < 100$ ) com um tempo computacional 10,6% inferior, em média, em relação à Decomposição Clássica. Vale lembrar que em quase todos os casos o limite máximo de 100 iterações foi atingido.

Os resultados também corroboram com a ideia de que os parâmetros são realmente importantes para o desempenho do método de PH; ou seja, a escolha do parâmetro  $\mu$  adequado pode acelerar a convergência do processo, bem como impactar na qualidade da solução do método. Nos casos analisados, não foi possível concluir qual o melhor valor do parâmetro de penalidade a ser utilizado, embora se tenha um indicativo que deve ser sempre maior ou igual a 1. Esse comportamento demonstra que o valor de  $\mu$  deve sempre ser investigado em função das características do caso estudado.

Desse modo, em vez de considerar um parâmetro de penalidade fixo durante todo o processo iterativo, duas estratégias heurísticas são propostas neste trabalho com o intuito de atualizar  $\mu$  a cada nova iteração.

A primeira delas considera a norma do gradiente das variáveis relaxadas no processo de decomposição e os valores máximos e mínimos dessas variáveis em cada iteração, da seguinte forma:

$$\mu_{iter+1} = \mu_{iter} \left\{ E \left[ \sum_s \sum_{t=1}^{T-1} \left( \frac{\|x_{t,iter}^s - \bar{x}_{iter}\|^2}{(x_{t,iter}^{s,max} - x_{t,iter}^{s,min} + 1)} \right) \right] \sigma + 1 \right\}, \quad (86)$$

em que,  $\sigma^4$  é um fator de ajuste inicialmente definido e  $x_{iter}^{\max(\min)}$  indica o máximo/mínimo valor das variáveis na iteração  $iter$ . É importante destacar que o valor inicial de  $\mu$  deve ser bem pequeno como, por exemplo, igual a 0,0001, a fim de proporcionar um incremento gradativo do mesmo. Seu aumento deve ser mais acelerado nas iterações iniciais,

---

<sup>4</sup> De acordo com as características do problema, é necessário escolher um fator de ajuste (heurístico) de tal forma que se evite um crescimento inicial exagerado de  $\mu$ . Com o estudo de casos, observou-se que é interessante evitar grandes "passos" entre interações, com o propósito de melhorar o desempenho do algoritmo. Assim, nesses casos iniciais, foi utilizado  $\sigma$  igual a 10. Obviamente que outros critérios poderiam ter sido usados. Por exemplo, considerar  $\sigma = \min(10\mu, \max(0, 1\mu, (79)))$ .

em decorrência dos maiores desvios entre as variáveis relaxadas e seus valores metas, tornando-se estável ao final do processo. Caso os valores iniciais sejam elevados, o parâmetro de penalidade  $\mu$  deve crescer rapidamente, o que pode não ser interessante para a convergência do algoritmo.

Com base em (86), nas Tabelas 9 e 10 estão mostrados os resultados para os meses de Janeiro e Junho, respectivamente, destacando também o valor de  $\mu$  ao final do processo.

**Tabela 9. Análise de desempenho dos esquemas de decomposição utilizando a heurística descrita em (86) - Janeiro.**

Decomposição	$\mu_{iter}$	Tempo de CPU (h:m)	Iter	Função Objetivo (Bilhões \$)	$D_{iter}$
Clássica	74,58	01:15	28	57,969	99
Alternativa	100	00:34	13	57,935	90

**Tabela 10. Análise de desempenho dos esquemas de decomposição utilizando a heurística descrita em (86) - Junho.**

Decomposição	$\mu_{iter}$	Tempo de CPU (h:m)	Iter	Função Objetivo (Bilhões \$)	$D_{iter}$
Clássica	7,95	04:54	26	34,742	94
Alternativa	25,13	01:34	9	34,741	95

De forma a observar o comportamento do parâmetro de penalidade ao longo das iterações, na Figura 22 está mostrado a evolução de  $\mu$  para o mês de Janeiro considerando a decomposição Clássica. Como comentado anteriormente, as variações são mais perceptíveis nas primeiras iterações, tornando-se mais estável ao final do processo iterativo.

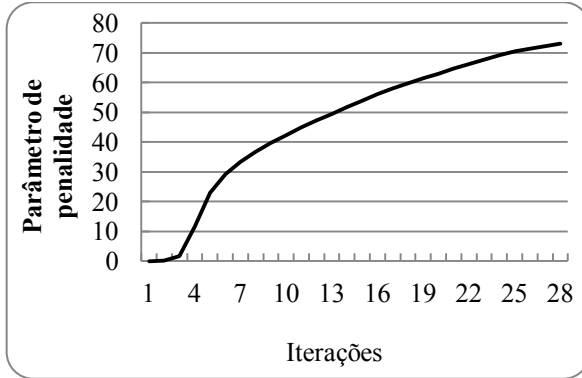


Figura 22. Evolução do parâmetro de penalidade com base em (86) para a decomposição Clássica no mês de Janeiro.

De acordo com as Tabela 9 e Tabela 10, note que a Decomposição Alternativa novamente apresentou os melhores desempenhos; isto é, menores valores de  $D$  em um menor número de iterações e, conseqüentemente, um tempo computacional reduzido em relação à Decomposição Clássica.

É conveniente ressaltar que para o mês de Janeiro houve uma redução no tempo computacional de quatro vezes para a Decomposição Clássica e oito vezes para a Decomposição Alternativa. Por sua vez, no mês de Junho, as reduções em função da atualização iterativa de  $\mu$  foram também da ordem de quatro vezes para a Decomposição Clássica e dez vezes para a Decomposição Alternativa.

De forma complementar a esses resultados, é interessante avaliar o critério de convergência predefinido para o método de PH. O objetivo consiste em observar o máximo desvio absoluto das variáveis relaxadas em relação aos seus valores meta. Nesse sentido, os desvios das variáveis de volume e geração termelétrica considerando todos os cenários  $s$ , conforme (87), estão ilustrados nas Figuras 23 e 24 para os meses de Janeiro e Junho, respectivamente.

$$|\text{erro absoluto}| = \max(|x_1 - \bar{x}|, |x_2 - \bar{x}|, \dots, |x_s - \bar{x}|). \quad (87)$$

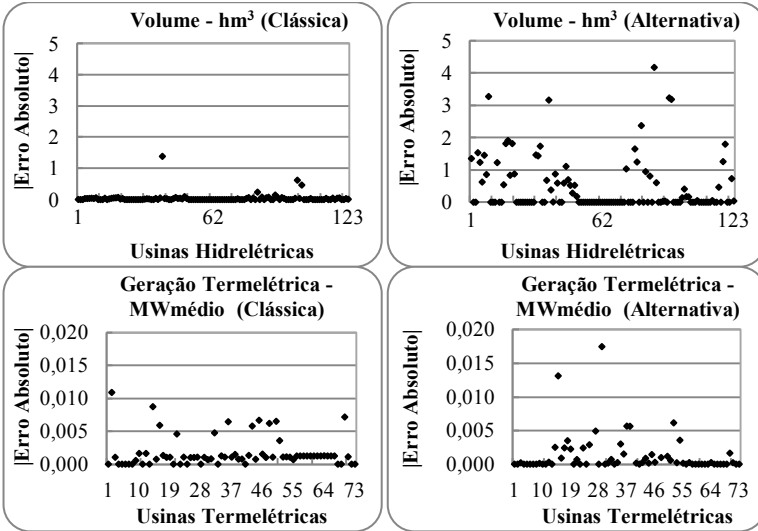


Figura 23. Erro Absoluto - Mês de Janeiro.

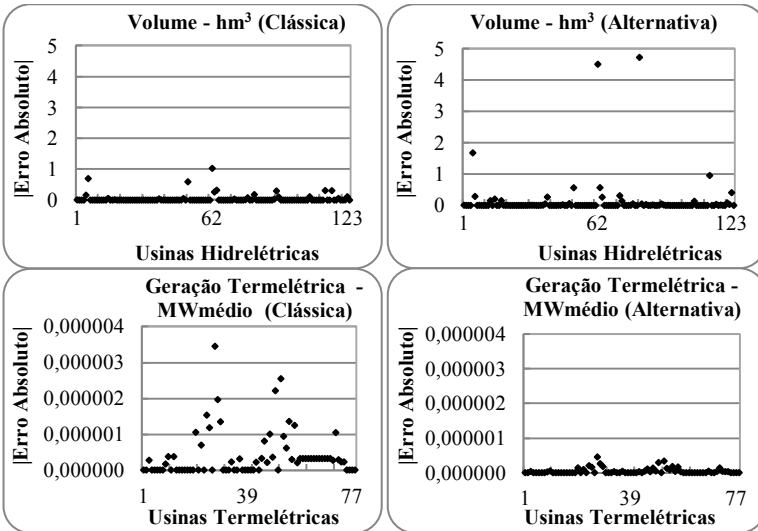


Figura 24. Erro Absoluto - Mês de Junho.

De acordo com os resultados, é possível afirmar que o critério de convergência é bastante satisfatório, pois os máximos desvios absolutos são substancialmente pequenos para ambos os esquemas de decomposição. A fim de ilustrar tal comentário, o maior desvio da

variável de volume considerando os máximos desvios de todas as usinas do sistema obtido via Decomposição Alternativa no mês de Junho corresponde a aproximadamente 0,04% do valor da variável primal associada (4 hm<sup>3</sup>). Esse desvio está associado à usina de Capim Branco I, cujo volume máximo é igual a 241,13 hm<sup>3</sup>.

Ademais, nota-se que dependendo do caso e das variáveis analisadas, a Decomposição Alternativa pode inclusive apresentar menores desvios absolutos quando comparado com a Decomposição Clássica quando foi utilizada a atualização iterativa conforme (86).

A segunda alternativa proposta também considera a norma do gradiente no critério para atualização do parâmetro  $\mu$ . Entretanto, diferentemente do caso anterior, a heurística utilizada pondera a norma pela magnitude das variáveis relaxadas (por exemplo, no que diz respeito aos volumes armazenados, o denominador corresponde ao volume útil do reservatório), da seguinte maneira:

$$\mu_{iter+1} = \frac{\mu_{iter}}{E \left[ \sum_s \sum_{t=1}^{T-1} \left( \frac{\|x_{t,iter}^s - \bar{x}_{iter}\|^2}{(x_t^{\max} - x_t^{\min} + 1)} \right) \right] \sigma + 1}. \quad (88)$$

Assim, os valores iniciais devem ser elevados, por exemplo, iguais a 100, pois reduzem na medida em que as iterações vão evoluindo, sendo limitado em 1, tendo em vista os resultados destacados nas Tabelas 7 e 8 (onde os melhores resultados podem ser associados com os parâmetros de penalidades iguais ou maiores que 1).

Com base nesses argumentos, nas Tabelas 11 e 12 estão apresentados os resultados para essa nova alternativa proposta.

**Tabela 11. Análise de desempenho dos esquemas de decomposição utilizando a heurística descrita em (88) - Janeiro.**

Decomposição	$\mu_{iter}$	Tempo de CPU (h:m)	Iter	Função Objetivo (Bilhões \$)	$D_{iter}$
Clássica	1	04:00	100	57,911	1.324
Alternativa	1	03:53	100	57,919	833

**Tabela 12. Análise de desempenho dos esquemas de decomposição utilizando a heurística descrita em (88) - Junho.**

Decomposição	$\mu_{iter}$	Tempo de CPU (h:m)	Iter	Função Objetivo (Bilhões \$)	$D_{iter}$
Clássica	1	17:26	100	34,752	1.016
Alternativa	1	16:40	100	34,744	633

Nesse caso, os desempenhos são inferiores quando comparados com aqueles mostrados nas Tabela 9 e Tabela 10, uma vez que o processo não atingiu sua convergência considerando o limite máximo de iterações. Observe também que os valores dos parâmetros de penalidade na última iteração para todos os casos analisados são iguais ao valor mínimo predefinido.

Embora a segunda alternativa não tenha apresentado um desempenho satisfatório, os resultados demonstraram que a atualização iterativa do parâmetro de penalidade  $\mu$  pode proporcionar melhorias significativas ao desempenho computacional do método de PH. Ou seja, o uso desse artifício permite obter soluções de melhor qualidade (menores valores de  $D$ ) em um tempo computacional bastante reduzido. Além disso, destaca-se a eliminação do árduo processo de escolha do parâmetro de penalidade ideal para cada caso em estudo.

De acordo com esses aspectos, todos os demais casos relacionados com o método de PH e discutidos na sequência do documento estão associados à atualização iterativa de  $\mu$  de acordo com (86).

### 5.3.1.2 Programação de Alto Desempenho

Tendo em vista a estrutura particular de decomposição do método de PH apresentada na Seção 3.3.2, os resultados obtidos via o desenvolvimento de um algoritmo de programação paralela são apresentados nesta seção. O principal propósito consiste em demonstrar as vantagens da utilização de técnicas de programação paralela em relação à programação serial. Para tanto, a *Message Passing Interface - MPI* (SNIR, 1996) versão 1.3.1 foi utilizada.

Nesse tipo de abordagem, a distribuição de tarefas entre os processadores de maneira uniforme é imprescindível para o bom desempenho do algoritmo, conforme discutido na literatura (BIRGE *et al.*, 1996; NIELSEN e ZENIOS, 1997; ESCUDERO *et al.*, 1999). A



ideia é que cada processador deve ser encarregado de resolver todas as tarefas previamente alocadas ao mesmo independentemente dos demais. No caso desse estudo em particular, cada processador deve ser responsável por resolver  $n$  subproblemas quadráticos, os quais estão associados a  $n$  cenários. Desse modo, é possível prover uma melhor eficiência do algoritmo evitando constantes trocas de informações entre processadores distintos. O algoritmo de programação paralela desenvolvido para o método de PH pode ser assim resumido:

ALGORITMO PARALELO PH:

- Passo 0:* Inicialmente, é necessário carregar todos os dados comuns a todos os processadores
- Passo 1:* O processador "mestre" define e envia as tarefas (o número de subproblemas a serem solucionados) para cada processador "escravo", incluindo ele mesmo. Se a divisão não for exata, cada cenário restante deve ser realocado. Por exemplo, se o número total de cenário é igual a 513 e há quatro processadores, o processador "mestre" irá resolver 129 subproblemas associados a 129 cenários, e os demais processadores irão solucionar 128 subproblemas relacionados à 128 cenários
- Passo 2:* Os dados individuais de cada processador ou cenário devem ser carregados
- Passo 3:* Uma vez que cada processador tem um específico grupo de subproblemas, os subproblemas devem ser solucionados. Ao final do processo, o resultado deve ser enviado ao processador "mestre"
- Passo 4:* Com base nesses resultados, o processador "mestre" atualiza as restrições de não-antecipatividade e resolve o problema dual. Adicionalmente, a critério de convergência é avaliado
- Passo 5:* Se a convergência não for estabelecida, os valores atualizados devem ser reenviados aos processadores "escravos" pelo processador "mestre", e o processo deve retornar ao passo 3.

Observe que esse algoritmo é facilmente implementável e visa, em especial, reduzir a troca de informações entre processadores. Consequentemente, a resolução dos subproblemas deve demandar um maior esforço computacional do algoritmo.

Com base nesses aspectos, o desempenho de ambas as estratégias podem ser visualizadas nas Tabelas 13 e 14, considerando os dois processadores Intel Xeon X5680, cada um deles com seis processadores físicos; ou seja, 12 processadores.

**Tabela 13. Análise de desempenho dos esquemas de decomposição utilizando programação de alto desempenho - Janeiro.**

Decomposição	$\mu_{iter}$	Tempo de CPU (h:m)	Iter	Função Objetivo (Bilhões \$)	$D_{iter}$
Clássica	74,58	00:26	28	57,969	99
Alternativa	100	00:12	13	57,935	90

**Tabela 14. Análise de desempenho dos esquemas de decomposição utilizando programação de alto desempenho - Junho.**

Decomposição	$\mu_{iter}$	Tempo de CPU (h:m)	Iter	Função Objetivo (Bilhões \$)	$D_{iter}$
Clássica	7,95	01:10	26	34,742	94
Alternativa	25,13	00:17	9	34,741	95

De forma complementar às Tabelas 13 e 14, na Figura 25 está mostrado o ganho incremental de desempenho em função do número de processadores, o *speed-up*, que pode ser definido da seguinte maneira:

$$Speed-up_p = \frac{\text{Tempo de CPU do algoritmo sequencial}}{\text{Tempo de CPU do algoritmo paralelo (n° proc)}}. \quad (89)$$

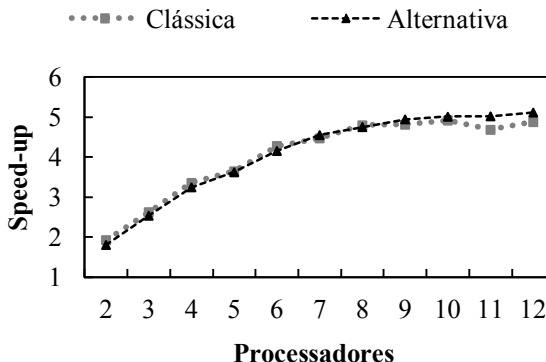


Figura 25. *Speed-up* para as diferentes estratégias de decomposição para ambos os meses.

Com base na Figura 25, nota-se que o *speed-up* tende a estabilidade com o incremento no número de processadores. Isso se deve, em especial, ao aumento da troca de informações entre processadores, que pode variar de 3% a 8% do tempo total de processamento.

Nesse caso, houve uma redução média de aproximadamente 72% no tempo total de processamento quando comparado com o caso serial.

É importante comentar que há uma relação entre os ganhos de desempenho e o tamanho do problema. Também de acordo com a Figura 25, pode-se perceber que após o uso 10º processador, melhorias significativas não foram observadas no desempenho do algoritmo. Por esse motivo, deve-se sempre avaliar a máxima eficiência para o problema estudado ou ainda prover melhorias ao algoritmo de forma a aumentar sua eficiência computacional.

Além dos aspectos computacionais abordados até o momento, é interessante analisar comparativamente as diferenças existentes entre as políticas resultantes de ambas as estratégias de decomposição. Para tanto, da Figura 26 à Figura 31 estão ilustrados os montantes de geração das usinas hidrelétricas e termelétricas por subsistema, bem como os respectivos CMOs considerando a primeira semana dos meses em questão.

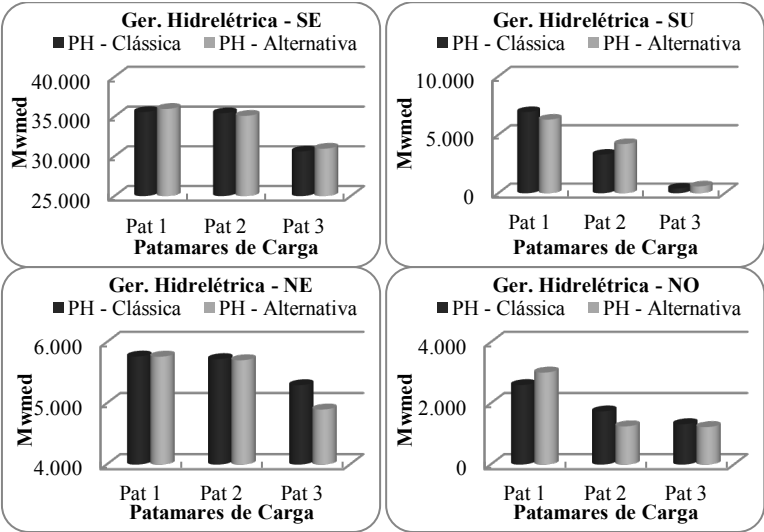


Figura 26. Geração Hidrelétrica - Mês de Janeiro.

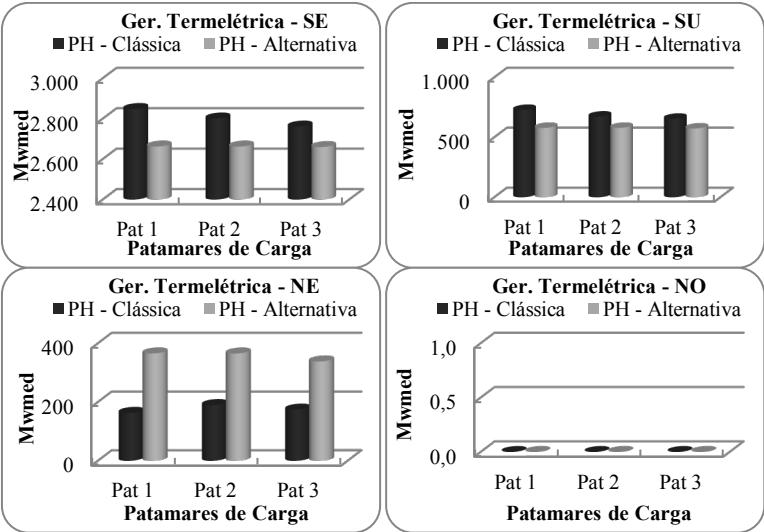


Figura 27. Geração Termelétrica - Mês de Janeiro.

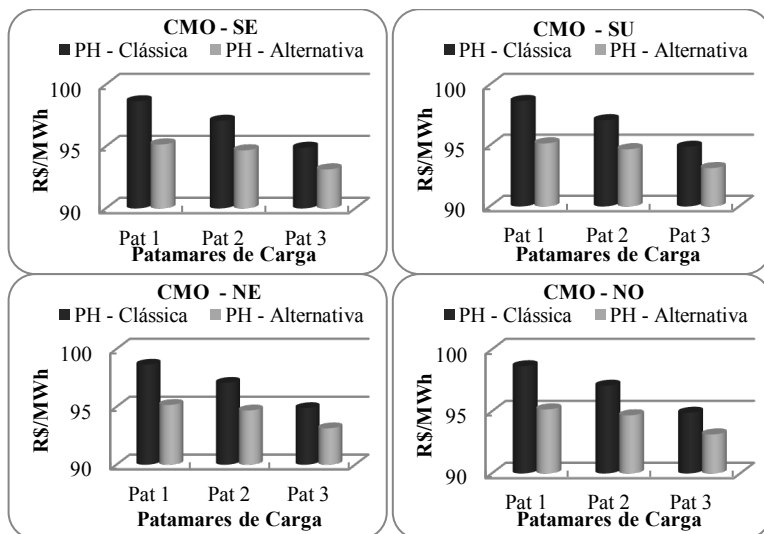


Figura 28. CMO - Mês de Janeiro.

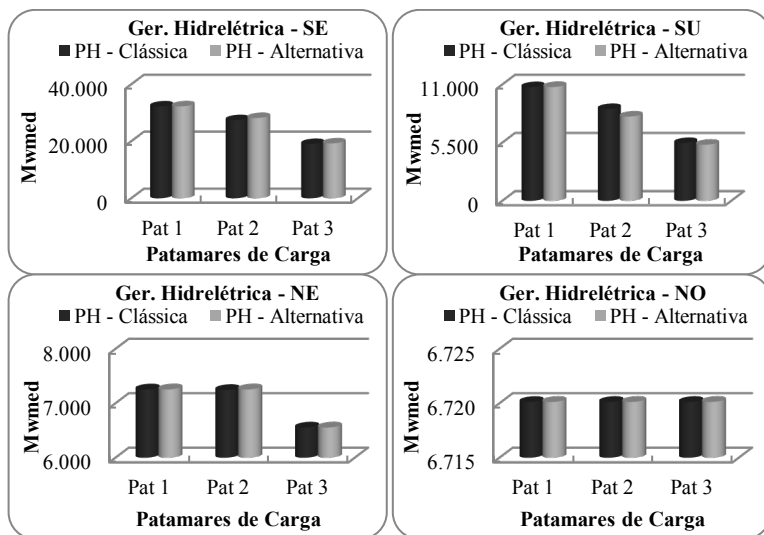


Figura 29. Geração Hidrelétrica - Mês de Junho.

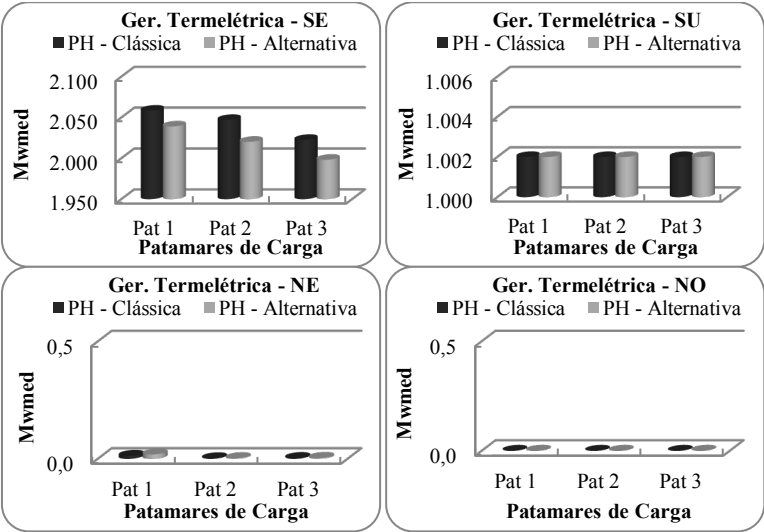


Figura 30. Geração Termelétrica - Mês de Junho.

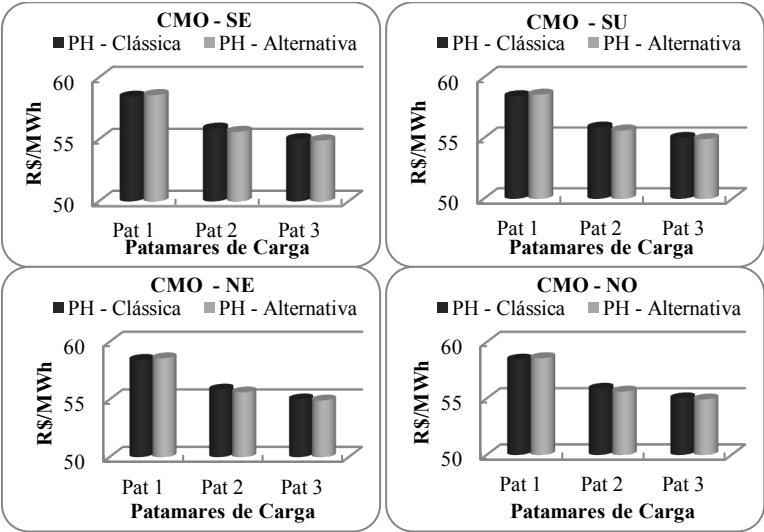


Figura 31. CMO - Mês de Junho.

De maneira análoga aos desvios absolutos entre as variáveis e seus valores metas apresentados na Subseção 5.3.1.1, as diferenças mais acentuadas com relação às gerações e aos CMOs estão associadas ao mês de Janeiro.

Nesse mês, é possível observar, por exemplo, que há uma maior geração termelétrica no subsistema SE na Decomposição Clássica e, por conseguinte, uma menor geração termelétrica no subsistema NE, de forma contrária à Decomposição Alternativa. Em resumo, o despacho foi efetuado de forma distinta para atender a mesma demanda nos diferentes esquemas de decomposição, tendo em vista a complementaridade entre os subsistemas.

Essa análise pode ser complementada com os valores dos CMOs. Note que os CMOs em ambos os PMOs são iguais em todos os subsistemas, ratificando a possibilidade de decisões distintas de gerações, dado que o limite de transmissão entre os subsistemas não foi atingido.

No que diz respeito às divergências entre os CMOs nas decomposições, somente no PMO de Janeiro os desvios foram observados, iguais a aproximadamente 3 R\$/MWh.

De uma maneira geral, esses resultados ressaltam a competitividade da Decomposição Alternativa, sem que haja prejuízo à qualidade da solução do problema.

Por fim, cabe aqui uma análise com relação aos custos esperados de operação desprezando a FCF advinda do NEWAVE, uma vez que o custo futuro tem um peso considerável no custo total de operação. Em outras palavras, a ideia consiste em observar somente o custo com relação ao despacho das usinas termelétricas considerando todos os estágios e/ou eventuais déficits de energia para os casos em questão.

Nas Tabela 15 e Tabela 16 estão apresentados os resultados desse estudo.

**Tabela 15. Composição da função objetivo do problema - Janeiro.**

Decomposição	FCF (Bilhões \$)	Somatório do	Função Objetivo (Bilhões \$)
		Custo Individual dos Estágios (Bilhões \$)	
Clássica	57,661	0,308	57,969
Alternativa	57,640	0,295	57,935

**Tabela 16. Composição da função objetivo do problema - Junho.**

Decomposição	FCF (Bilhões \$)	Somatório do Custo Individual dos Estágios (Bilhões \$)	Função Objetivo (Bilhões \$)
Clássica	34,431	0,311	34,742
Alternativa	34,431	0,310	34,741

Corroborando com as análises anteriores, nota-se que as diferenças observadas no uso dos recursos de geração estão também demonstradas no valor do somatório dos custos individuais dos estágios (desprezando a FCF), embora seja pouco perceptível na função objeto global do problema em razão da maior contribuição da FCF resultante do estudo da etapa com horizonte de cinco anos, o PEN. As diferenças dos despachos das usinas termelétricas no mês de Janeiro acarretam em diferenças nos custos de aproximadamente R\$ 13 milhões. Por outro lado, no mês de Junho, a política resultante gera a uma diferença efetiva de apenas R\$ 1 milhão.

### 5.3.1.3 Horizonte de Planejamento Estendido

Nesse caso, a ideia consiste em observar o desempenho dos esquemas de decomposição via PH quando um horizonte de planejamento diferente daquele considerado no PMO é adotado; ou seja, considerando árvores de cenários com um maior número de estágios e números de aberturas diferentes daqueles anteriormente utilizados. Esse fato impacta diretamente no tamanho do problema dual das estratégias de decomposição.

Portanto, um período de estudo igual a quatro meses é utilizado, em que as incertezas são consideradas do segundo estágio em diante, totalizando 1.440 cenários, conforme detalhado na Tabela 17. É importante comentar que a geração dos demais cenários mensais (a partir de Março) foram baseadas nos PMOs de Fevereiro e Março; ou melhor, foram sorteados aleatoriamente valores de afluições dentre aqueles disponíveis dos DECKs relacionados com os PMOs supracitados, sem considerar uma correlação espacial e/ou temporal. Vale destacar que o principal objetivo desse estudo é observar o impacto do aumento do horizonte de estudo do problema nas estratégias de decomposição, além de exaltar que os modelos desenvolvidos permitem esse tipo de investigação.



**Tabela 17. Características da árvore de cenários.**

Mês	Estágios	Realizações
Janeiro	1	1
	2	2
	3	2
	4	2
	5	2
	6	2
Fevereiro	7	3
Março	8	3
Abril	9	5
Total de Cenários		1.440

De acordo com as análises apresentados da subseção anterior, somente o algoritmo de programação paralela é utilizado, com o máximo número de processadores (doze). Assim, na Tabela 18 estão mostrados os resultados de ambas as estratégias de decomposição.

**Tabela 18. Desempenho dos esquemas de decomposição para um horizonte de estudo estendido.**

Decomposição	$\mu_{iter}$	Tempo de CPU (h:m)	Iter	Função Objetivo (Bilhões \$)	$D_{iter}$
Clássica	100	19:34	93	59,427	99
Alternativa	100	03:10	21	59,410	97

Antes de comentar sobre os resultados da Tabela 18, vale destacar as reais diferenças entre as decomposições. O problema dual resultante da Decomposição Clássica tem 11.592 variáveis. Por outro lado, o número de variáveis relacionadas ao problema dual da Decomposição Alternativa é igual a 984. Observe que há uma disparidade considerável entre ambas. Consequentemente, tempo computacional da Decomposição Alternativa por iteração é quase 25% menor em relação ao tempo requerido pela Decomposição Clássica. Tal fato ajuda a explicar a grande diferença nos tempos de processamento apresentados na Tabela 18.

De forma similar aos casos anteriores, novamente a Decomposição Alternativa requereu um número menor de iterações para atingir a convergência do processo.

Esses resultados ratificam os comentários precedentes com relação à eficiência computacional da Decomposição Alternativa proposta, quando aplicada na resolução de problemas similares ao PMO. Por esse motivo, todas as análises que se sucedem estão associadas somente com a Decomposição Alternativa.

Agora, analisando as diferenças nos custos esperados de operação quando comparado com os demais casos estudados, percebe-se que a máxima diferença foi igual a aproximadamente R\$ 1,475 Bilhões. Esses valores são resultantes de políticas distintas de operação em função de alguns aspectos, como: novos valores das variáveis aleatórias, o número de aberturas em cada estágio do horizonte total de estudo, além do ponto de acoplamento com o modelo NEWAVE, que, de forma similar a apresentada na Seção 5.3.1.2, representa aproximadamente 99% do custo esperado total de operação para ambas as estratégias (por exemplo, para a Decomposição Alternativa R\$ 58,900 Bilhões estão associados à FCF e R\$ 51 Milhões relacionados com o somatório dos custos individuais por estágio em função do despacho das usinas termelétricas). Em outras palavras, tem-se a resolução de um novo problema.

Desse modo, a extensão do horizonte de estudo com a representação das incertezas de forma diferente daquela feita no modelo DECOMP pode trazer impactos significativos para a operação do sistema, em decorrência dos fatores acima elencados.

A fim de complementar essa análise, nas Figuras 32, 33 e 34 estão destacados os totais de geração das usinas hidrelétricas, das usinas termelétricas e os valores CMOs por subsistema, considerando o primeiro estágio do horizonte de planejamento, para o horizonte de estudo estendido e também para o horizonte considerado no PMO.

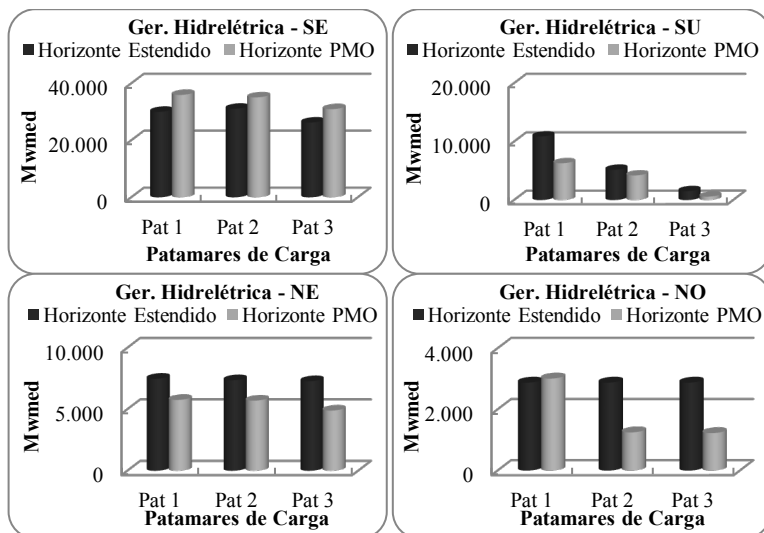


Figura 32. Comparação entre os níveis de geração das usinas hidrelétricas para os diferentes horizontes de estudos.

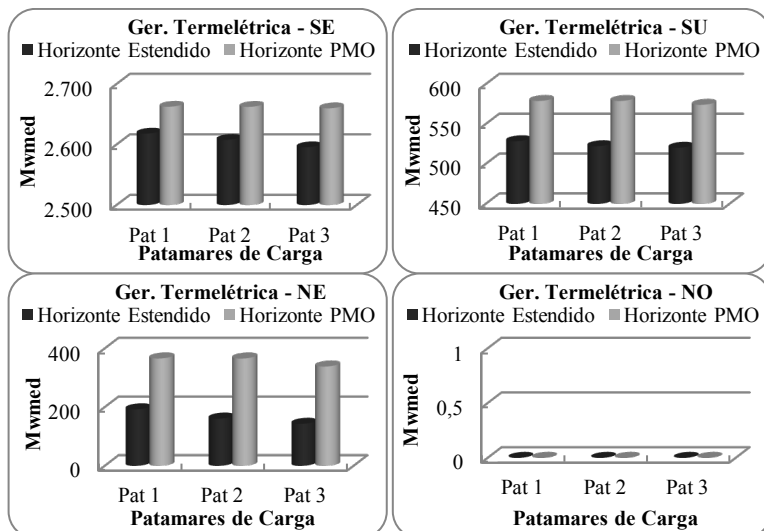


Figura 33. Comparação entre os níveis de geração das usinas termelétricas para os diferentes horizontes de estudos.

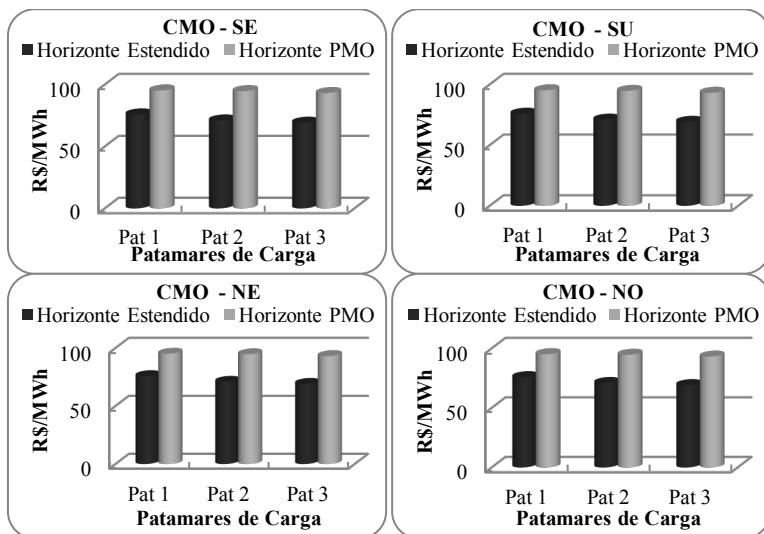


Figura 34. Comparação entre os CMOs para os diferentes horizontes de estudos.

Assim como destacado para os custos, a política de operação resultante do caso com horizonte de planejamento estendido difere consideravelmente daquela considerando um horizonte igual ao do PMO, pelas razões acima elencadas; ou seja, há um uso distinto dos recursos de geração em virtude de uma fronteira diferente para o problema (a FCF), associada também à nova representação das vazões afluentes aos reservatórios do sistema. Por exemplo, observe que os CMOs são inferiores em relação aos estudos com uma árvore igual àquela utilizada no PMO.

Esses resultados podem dar ensejo para novos estudos investigativos no que diz respeito ao aumento do horizonte de estudo. É possível, por exemplo, estudar uma forma de representar as variáveis aleatórias de forma similar à atual, apenas estendendo o horizonte de planejamento. Nesse caso, seria possível uma comparação justa dos custos esperados e das políticas resultantes entre os problemas.

#### 5.3.1.4 Partida Quente

As técnicas de partida quente são usualmente aplicadas aos métodos baseados no LA e, assim como o parâmetro de penalidade, podem ser determinantes para melhoria do desempenho computacional

dessa classe de métodos, como demonstrando em Santos *et al.* (2009) em um estudo associado particularmente ao método de PH.

Nesse sentido, é proposta uma avaliação do uso desse artifício matemático na solução da RV1 dos PMOs anteriormente utilizados, em função dos resultados obtidos na RV0. Convém lembrar que o PMO é revisado semanalmente a fim de incorporar as novas perspectivas futuras com relação às vazões afluentes, de acordo com os valores já verificados na primeira semana de estudo. Portanto, os resultados (variáveis primais e duais) das RV0 podem ser bons valores iniciais para a RV1. Desse modo, aqueles resultados associados às Tabelas 9 e 10 são utilizados como pontos iniciais para resolução das respectivas revisões dos PMOs.

Nesse sentido, nas Tabelas 19 e 20 estão apresentados os resultados comparativos em decorrência do uso ou não das técnicas de partida quente nos PMOs de Janeiro e Junho, respectivamente, considerando o algoritmo de programação paralela do método de PH e atualização iterativa do parâmetro de penalidade.

**Tabela 19. Análise do impacto do uso de técnicas de partida quente - RV1 Janeiro.**

Partida Quente	$\mu_{iter}$	Tempo de CPU (h:m)	Iter	Função Objetivo (Bilhões \$)	$D_{iter}$
Não	100	00:08	11	57,426	90
Sim	100	00:06	9	57,428	85

**Tabela 20. Análise do impacto do uso de técnicas de partida quente - RV1 Junho.**

Partida Quente	$\mu_{iter}$	Tempo de CPU (h:m)	Iter	Função Objetivo (Bilhões \$)	$D_{iter}$
Não	23,87	00:19	12	34,732	70
Sim	23,15	00:15	10	34,732	69

Analisando os resultados entre o uso das técnicas de partida quente e aqueles sem uso da mesma, é possível concluir que, nos casos estudados, as técnicas de partida quente podem proporcionar melhorias no que diz respeito ao desempenho computacional do método de PH, ainda que um maior número de estudo de casos seja necessário.

Além disso, a redução no tempo absoluto de processamento pode ser mais significativa no caso de implementação do algoritmo de programação serial ou no caso particular de alguns PMOs, como ocorrido para o PMO de Junho de 2009. Em valores numéricos, houve uma redução máxima de aproximadamente quatro minutos no tempo computacional via programação paralela (quase 21% de redução).

Por outro lado, para o PMO de Janeiro, embora tenha havido uma redução de 25% no tempo total de processamento, esse montante percentual corresponde à apenas dois minutos em valores absolutos.

De acordo com esses números, pode-se afirmar que o uso adequado de artifícios matemáticos podem prover benefícios ao desempenho computacional do algoritmo do método de PH.

Aqui, é conveniente também apresentar a evolução dos CMOs médios entre as revisões para cada um dos PMOs estudados, de forma similar a efetuada na vida real, a fim de observar a variabilidade entre tais revisões, conforme ilustrado pela Figura 35.

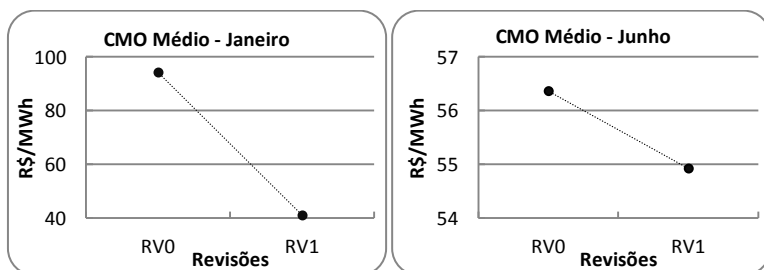


Figura 35. Evolução dos CMOs médios.

Note que há uma volatilidade no PMO de Janeiro de 2009 entre a RV0 e RV1, igual a aproximadamente 50R\$/MWh. De forma contrária, diferenças de apenas 1,5 R\$/MWh foram observadas no PMO de Junho de 2009. Tais resultados estão alinhados com aqueles resultantes do modelo DECOMP versão 16.0<sup>5</sup>, demonstrando que o modelo desenvolvido resolve realmente um problema bastante similar ao considerado pelo modelo DECOMP. Vale lembrar que, nessa fase do estudo, foi utilizado outro método de solução, além das distinções entre a modelagem de alguns aspectos do SIN, conforme discutido no

<sup>5</sup> No caso real, a variação para o mês de Janeiro foi igual a R\$ 46 entre as revisões (variou de R\$/MWh 75 na RV0 para R\$/MWh 27 na RV1) e para o mês de Junho igual a R\$ 2,7 (de R\$/MWh 37,69 para R\$/MWh 34,99).

Capítulo 4 e, ainda assim, os resultados apresentam o mesmo comportamento.

### **5.3.2 Caso 2 - Comparação entre o método de *Progressive Hedging* e a Decomposição Aninhada**

Neste trabalho tem-se também o objetivo de observar comparativamente o desempenho computacional do método de PH e da DA, além dos aspectos metodológicos associados ao método de PH destacados no Caso 1. Portanto, nesta subseção são apresentadas algumas análises de cunho computacional e das políticas resultantes dos métodos, destacando-se, em especial, a avaliação do impacto de dois fatores na solução dos métodos de decomposição: o número de restrições associadas à FPH e a representação das variáveis aleatórias no problema.

De maneira resumida, este estudo foi dividido em três etapas principais: (a) a modelagem do problema análoga ao PMO, considerando também aspectos relacionados à modelagem da FPH; (b) a representação das incertezas nas semanas do primeiro mês; (c) a extensão do horizonte de estudo.

#### *5.3.2.1 Análise comparativa no contexto do PMO*

No modelo DECOMP, a FPH é representada por uma função linear por partes de modo a viabilizar a solução do problema por meio de métodos de PL. A precisão dessa representação depende do número de pontos escolhidos na construção dos hiperplanos tangentes à FPH original e dos desvios ponto a ponto em relação à mesma.

Com base nesses comentários, o comportamento da DA e do método de PH em função do número de restrições relacionadas com a FPH são avaliados a seguir, onde o critério de convergência para a DA (desvio percentual entre o custo superior e o custo inferior) é igual a 0,001%, conforme destacado na Figura 10.

Inicialmente, nas Tabelas 21 e 22 estão mostrados os resultados para os algoritmos seriais nos meses de Janeiro e Junho, respectivamente, considerando a árvore de cenários original (vide Tabela 6) e somente duas aproximações lineares da FPH (o modelo DECOMP utiliza, em geral, 25 restrições/aproximações por usina do sistema).

**Tabela 21. Comparação entre os algoritmos seriais para uma representação simplificada (2 aproximações) da FPH - Janeiro.**

Decomposição	Tempo de		Função	Erro <sup>6</sup>
	CPU (h:m)	Iter	Objetivo (Bilhões \$)	- $D_{iter}$
DA	00:22	26	57,957	0,0008%
PH	00:18	16	57,940	91

**Tabela 22. Comparação entre os algoritmos seriais para uma representação simplificada (2 aproximações) da FPH - Junho.**

Decomposição	Tempo de		Função	Erro
	CPU (h:m)	Iter	Objetivo (Bilhões \$)	- $D_{iter}$
DA	00:42	11	34,752	0,0009%
PH	00:58	13	34,758	71

Por outro lado, nas Tabelas 23 e 24 são apresentados os resultados dos métodos de decomposição quando um maior número de pontos é utilizado na construção da FPH linear por partes (quinze aproximações para cada usina do sistema).

**Tabela 23. Comparação entre os algoritmos seriais para uma representação da FPH com 15 aproximações - Janeiro.**

Decomposição	Tempo de		Função	Erro
	CPU (h:m)	Iter	Objetivo (Bilhões \$)	- $D_{iter}$
DA	00:28	31	57,950	0.0009%
PH	00:34	13	57,935	90

**Tabela 24. Comparação entre os algoritmos seriais para uma representação da FPH com 15 aproximações - Junho.**

Decomposição	Tempo de		Função	Erro
	CPU (h:m)	Iter	Objetivo (Bilhões \$)	- $D_{iter}$
DA	01:14	17	34,735	0,0008%
PH	01:34	9	34,741	95

<sup>6</sup> Os valores apresentados nesta coluna referem-se ao erro entre os custos superiores e inferiores na DA e ao critério  $D$  com relação ao método de PH.



Antes de comentar os resultados acima apresentados, é importante destacar que o número de aproximações utilizadas na representação da FPH impacta diretamente no tamanho do problema e/ou subproblemas. Por exemplo, no mês de Janeiro, o ED tem 189.101 variáveis e 197.274 restrições e, por sua vez, o ED para o mês de Junho tem 815.851 variáveis e 844.340 restrições. Os tamanhos dos subproblemas resultantes dos métodos em questão estão descritos nas Tabelas 25 e 26.

**Tabela 25. Tamanhos dos subproblemas - FPH simplificada (2 aproximações).**

Meses	Métodos	Variáveis	Restrições
Janeiro	DA	1.551	1.617
	PH	10.851	12.965
Junho	DA	1.576	1.630
	PH	9.451	11.596

**Tabela 26. Tamanhos dos subproblemas - FPH linear por partes (15 aproximações).**

Meses	Métodos	Variáveis	Restrições
Janeiro	DA	1.551	5.676
	PH	10.851	41.378
Junho	DA	1.576	5.722
	PH	9.451	36.148

Tendo em vista o tamanho dos problemas e também com base nos resultados das Tabelas 21 à 24, pode-se concluir que a precisão na modelagem da FPH, a qual está diretamente associada ao incremento do número de restrições de desigualdade no problema, interfere especialmente no desempenho do algoritmo do método de PH. Isso se deve ao aumento no número de restrições de desigualdade em cada subproblema, as quais estão associadas a cada estágio  $t$  do horizonte de planejamento. Ou seja, há um aumento de  $t$  vezes mais restrições nos subproblemas resultantes do método de PH, o que pode ser visualizado nas Tabelas 25 e 26.

Com relação ao custo de operação, a máxima diferença observada, levando em consideração as distintas representações da FPH, é igual a aproximadamente R\$ 17 milhões (PMO de Junho), quando são analisadas separadamente as Tabelas 21 e 23 para Janeiro e Tabelas 22 e 24 para Junho. Esse montante pode ser associado às diferenças no

despacho das usinas termelétricas para as distintas representações da FPH

Neste ponto, é importante também comentar que 99% do custo esperado total de operação estão associados ao custo futuro advindo dos estudos de médio prazo (PEN). Assim, embora existam diferenças nas políticas de operação obtidas, o que acarretam custos individuais por estágios distintos, o impacto na função objetivo do problema não é tão significativo, como demonstrado nas Tabelas 27 e 28 abaixo.

**Tabela 27. Composição da função objetivo considerando as duas representações da FPH - Janeiro.**

Número de aprox.	Decomposição	FCF (Bilhões \$)	Somatório	Função Objetivo (Bilhões \$)
			Custo Individual dos Estágios (Bilhões \$)	
2	DA	57,803	0,154	57,957
	PH	57,642	0,298	57,940
15	DA	57,794	0,156	57,950
	PH	57,640	0,295	57,935

**Tabela 28. Composição da função objetivo considerando as duas representações da FPH - Junho.**

Número de aprox.	Decomposição	FCF (Bilhões \$)	Somatório	Função Objetivo (Bilhões \$)
			Custo Individual dos Estágios (Bilhões \$)	
2	DA	34,492	0,260	34,752
	PH	34,446	0,312	34,758
15	DA	34,477	0,258	34,735
	PH	34,431	0,310	34,741

Com base nos valores apresentados, note que as também diferenças no uso dos recursos de geração levam a custos futuros distintos. Dito de outro modo, o maior uso dos recursos termelétricos ao longo dos estágios resulta em níveis mais elevados nos reservatórios ao final do horizonte estudado e, conseqüentemente, uma FCF reduzida. De forma contrária, o maior uso de usinas hidrelétricas na operação do sistema provocam uma redução do volume armazenado e, então, um

custo futuro mais elevado. Esses aspectos tanto estão relacionados com os diferentes métodos de solução, bem como às diferenças na representação da FPH.

A fim de complementar essas análises, o montante de geração hidrelétrica, termelétrica e CMO resultantes da DA considerando ambas as aproximações da FPH para o mês de Junho de 2009 (maior desvio no custo total de operação quando são comparadas as duas representações) durante a primeira semana do horizonte de estudo estão apresentados nas Figuras 36, 37 e 38, respectivamente.

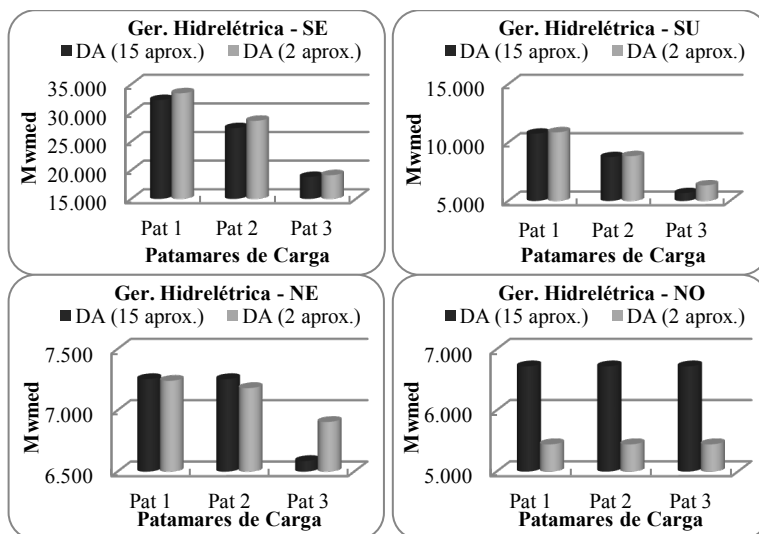


Figura 36. Perfil de Geração Hidrelétrica para o PMO de Junho de 2009 considerando diferentes números de aproximações na construção da FPH.

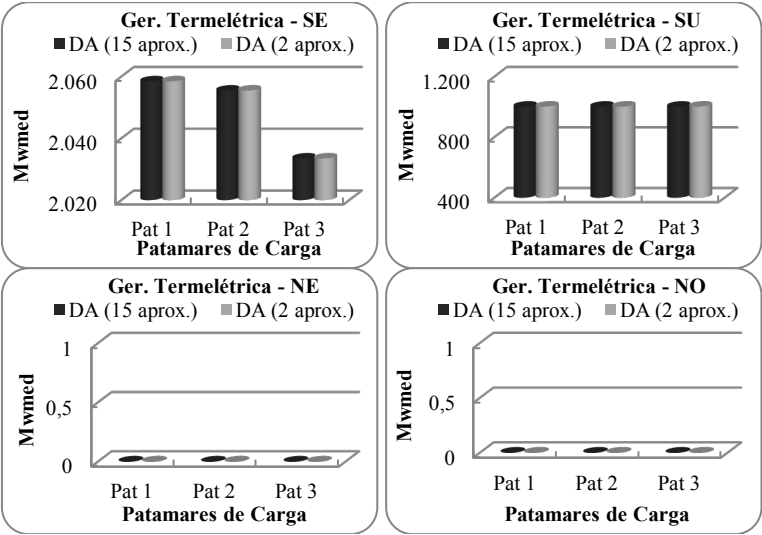


Figura 37. Perfil de Geração Termelétrica para o PMO de Junho de 2009 considerando diferentes números de aproximações na construção da FPH.

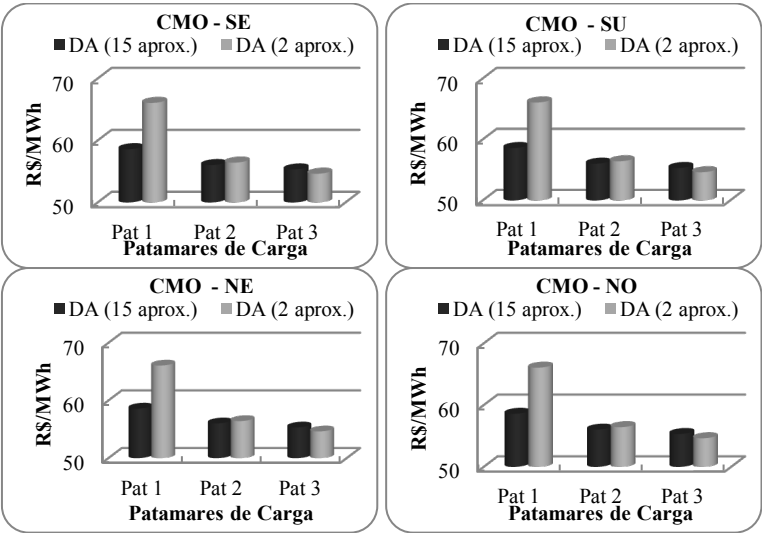


Figura 38. CMO para o PMO de Junho de 2009 considerando diferentes números de aproximações na construção da FPH.

Note que as diferenças na primeira semana estão relacionadas basicamente com as gerações hidrelétricas e com os CMOs que, conseqüentemente, impactam nas decisões de geração dos demais estágios. Assim, a análise sobre as diferenças no custo esperado total de operação deve também levar em consideração os demais estágios do horizonte de planejamento, como destacado anteriormente.

Esse estudo é importante para demonstrar que a representação da FPH pode realmente impactar na política resultante dos modelos. Essa ideia pode ser complementada com as Tabelas 29 e 30, onde estão apresentados os resultados de outro estudo via DA em que uma produtividade constante (somente uma restrição de igualdade em função da vazão turbinada) foi utilizada como FPH, apenas para ratificar o impacto da representação da FPH na solução do problema.

**Tabela 29. Comparação entre diferentes FPH via DA - Janeiro.**

Número de Aproximações	Função Objetivo (Bilhões \$)	CMO médio (R\$/MWh)
1 (produtibilidade)	57,534	62,47
2	57,957	89,80
15	57,950	89,87

**Tabela 30. Comparação entre diferentes FPH via DA - Junho.**

Número de Aproximações	Função Objetivo (Bilhões \$)	CMO médio (R\$/MWh)
1 (produtibilidade)	34,558	49,13
2	34,752	59,04
15	34,735	56,65

Os resultados acima enfatizam os comentários anteriores no sentido de que a modelagem da FPH pode produzir políticas distintas. Veja que no caso em que a FPH foi modelada por meio de uma produtividade constante, o CMO médio para a primeira semana foi, em média, 24% menor em relação às demais modelagens.

Do ponto de vista matemático, a representação da FPH com um maior número de aproximações resulta em um maior número de vértices para operação das usinas hidrelétricas; ou seja, mais possibilidades de produção para uma mesma usina hidrelétrica. Esse fato pode ser especialmente importante quando se resolve um problema de PL como é o caso da DA.

Além dos aspectos associados à FPH, neste trabalho tem-se também o objetivo de comparar as políticas de operação dos métodos de solução. Para tanto, da Figura 39 à Figura 41 estão apresentados os montantes de geração hidrelétrica e termelétrica, bem como o CMO dos métodos de decomposição para a primeira semana do mês de Janeiro de 2009, considerando 15 aproximações na FPH.

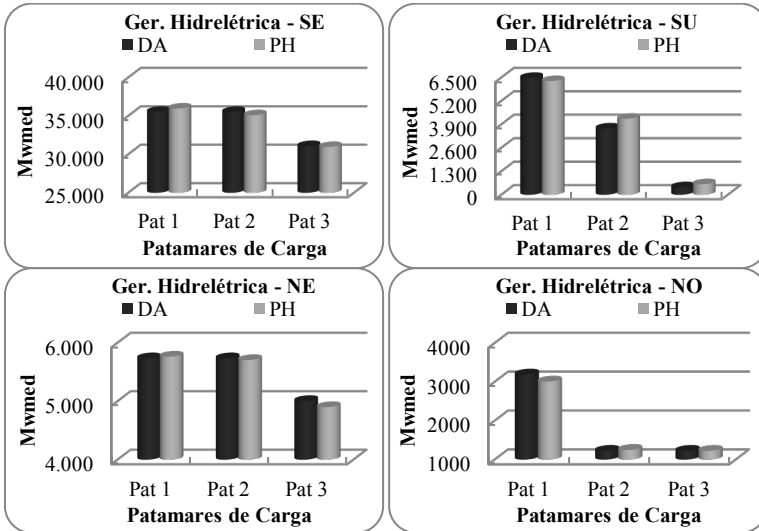


Figura 39. Perfis de geração hidrelétrica dos métodos de decomposição considerando 15 aproximações na FPH - Janeiro.

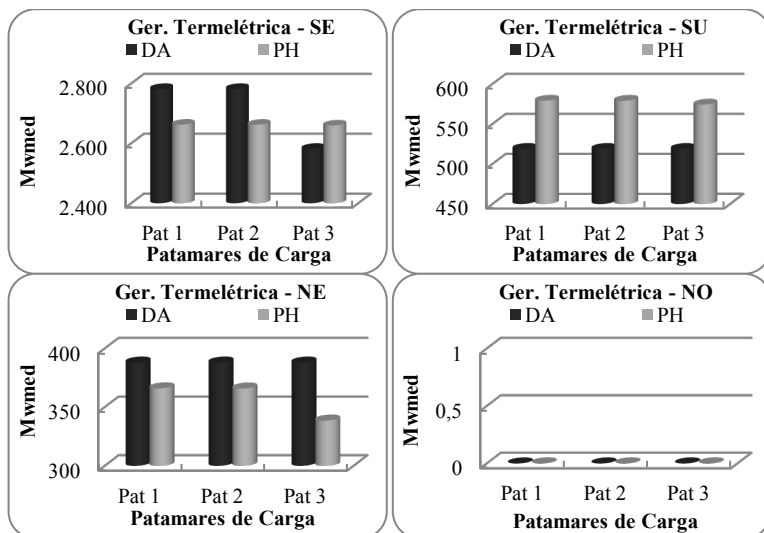


Figura 40. Perfis de geração termelétrica dos métodos de decomposição considerando 15 aproximações na FPH - Janeiro.

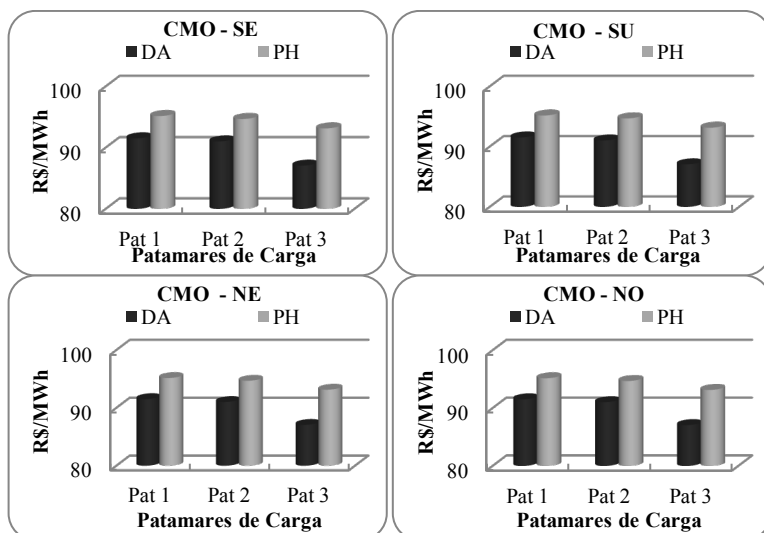


Figura 41. CMOs resultantes dos métodos de decomposição considerando 15 aproximações na FPH - Janeiro.

Refletindo um pouco das diferenças apresentadas nos custos esperados de operação dos métodos, os despachos das usinas e os CMOs

também apresentaram pequenas divergências. Nota-se que houve uma inversão nos níveis de geração entre subsistemas. Por exemplo, um maior despacho de termelétricas foi observado no subsistema SE para a DA em comparação com o método de PH e, de maneira inversa, na região SU. Com relação aos CMOs médios, aqueles resultantes do método de PH foram 4,5 R\$/MWh mais caros em relação à DA.

Essas diferenças existentes nos resultados podem ser associadas, por exemplo, ao maior *bang-bang* dos métodos de decomposição baseados na DB, que resultam em subproblemas de PL, como é o caso da DA.

### 5.3.2.2 Incertezas Semanais

Os estudos que envolvem os métodos de solução e os modelos estocásticos adotados nos *softwares* utilizados pelos agentes no SEB são essenciais para proporcionar um constante aprimoramento dessas ferramentas. Portanto, além de estudar outras técnicas de solução, como é o caso do método de PH, este trabalho também contempla análises no que diz respeito à árvore de cenário.

O modelo DECOMP, que considera apenas uma realização para as semanas do primeiro mês do horizonte de estudo, tem sido alvo da análise de diversos trabalhos, cujo foco consiste em avaliar a robustez do preço face às revisões das previsões semanais ajustadas. Por exemplo, Finardi *et al.* (2010) investigou o impacto da variação das afluências semanais no preço da energia e demonstrou que desprezar as características estocásticas nas semanas do primeiro mês podem provocar resultados não desejáveis. Como solução paliativa para mitigar tal problema, algumas heurísticas foram sugeridas na utilização dos valores previstos disponibilizados nos DECKs do modelo DECOMP (ajustar os valores das vazões afluentes semanais por meio de um fator "*alfa*").

Com base nesses estudos, nota-se que é relevante estudar a modelagem de incertezas a partir do segundo estágio do horizonte de planejamento. Ou seja, considerar diferentes realizações para as semanas do primeiro mês, como ilustrado pela Figura 42. A inserção dessas particularidades não está disponível na versão atual do modelo DECOMP (CEPEL, 2010b), porém está contemplada nos modelos desenvolvidos neste trabalho.



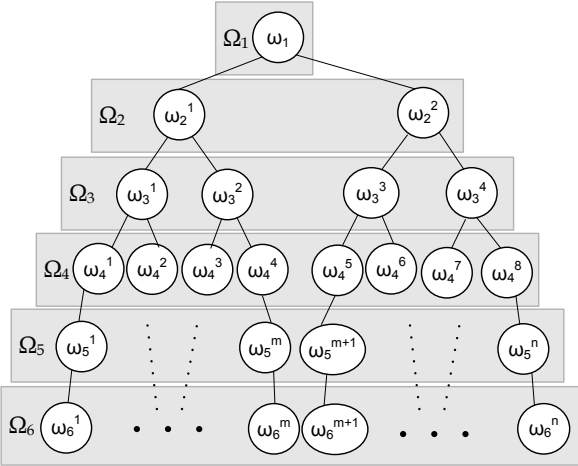


Figura 42. Árvore de cenários - Caso 2.

É fácil perceber que a incorporação de incertezas também nas semanas insere complicações adicionais para a resolução do problema do PMO. Em outras palavras, há um aumento no número de cenários e, consequentemente, tem-se o aumento do o tempo de processamento. De forma ilustrativa, na Tabela 31 é apresentado um exemplo do aumento do número de cenários em virtude da representação de incertezas semanais para ambos os meses estudados.

Tabela 31. Características do Caso 2.

Mês	Estágios	Realizações	Total de Cenários
Janeiro	1	1	1800
	2	2	
	3	2	
	4	3	
	5	3	
	6	5	
	7	10	
Junho	1	1	4500
	2	3	
	3	3	
	4	5	
	5	5	
	6	20	

Convém comentar que o número total de cenários foi escolhido de forma a manter uma coerência com os números apresentados na Tabela 6. Em outras palavras, como em Janeiro tinha-se um número menor de cenários totais, a mesma ideia foi mantida nesse caso. Além disso, como o propósito desse caso é basicamente avaliar o impacto computacional da representação das incertezas semanais e, consequentemente, o aumento do número total de cenários do problema, a quantidade reduzida de realizações semanais visa, sobretudo, evitar um incremento substancial no tamanho do ED.

Contudo, o ED para o mês de Janeiro passa a ter 3.154.251 variáveis e 11.550.660 restrições em comparação as 189.101 variáveis e 197.274 restrições associadas à árvore anterior. Para o mês de Junho, o aumento percentual do tamanho do problema é de aproximadamente 3.000%, ou seja, seria necessário resolver um ED do problema estocástico com 7.533.226 variáveis e 27.368.326 restrições. Nesses casos, ainda que um *software* robusto de PL seja utilizado, alguns fatores computacionais tornam-se mais evidentes, dentre os quais se destacam: o incremento do uso de memória computacional e o natural aumento do tempo de processamento. Essas características podem inviabilizar sua solução por meio do ED do problema.

O impacto desse aumento também pode ser observado nos métodos de decomposição, pois um maior número de subproblemas deve ser solucionado iterativamente. Contudo, o tamanho desses subproblemas é idêntico ao número apresentado na Seção 5.3.2.1.

Diante tais comentários, um estudo de casos com essas características é apresentado a seguir. A fim de observar o *speed-up* de ambos os métodos, além de outros importantes fatores, esse estudo foi dividido em dois tópicos principais: programação serial e programação paralela.

### • Programação Serial

Tendo em vista as discussões precedentes e os números de variáveis e restrições relacionados com os problemas/subproblemas, o desempenho de ambos os métodos são destacados nas Tabelas 32 e 33.

**Tabela 32. Comparação entre os métodos considerando uma árvore de cenários com incertezas semanais - Janeiro.**

Decomposição	Tempo de		Função	Erro
	CPU (h:m)	Iter	Objetivo (Bilhões \$)	- $D_{iter}$
DA	14:48	56	57,889	0,0009%
PH	08:12	11	57,882	99

**Tabela 33. Comparação entre os métodos considerando uma árvore de cenários com incertezas semanais - Junho.**

Decomposição	Tempo de		Função	Erro
	CPU (h:m)	Iter	Objetivo (Bilhões \$)	- $D_{iter}$
DA	12:19	18	34,741	0,0009%
PH	22:01	11	34,746	69

De antemão, convém destacar o aumento no tempo computacional de ambos os métodos quando comparado com os resultados apresentados na Seção 5.3.2.1. Portanto, caso seja necessário reavaliar a árvore de cenário do modelo estocástico atualmente utilizado em busca de uma melhor representação da realidade, uma consequência direta deve ser o aumento no tempo computacional.

No que diz respeito ao desempenho particular dos métodos de decomposição, nota-se que dependendo do caso em estudo e do critério de convergência preestabelecido, tanto a DA quanto o método de PH pode ser interessante. No PMO de Janeiro, por exemplo, a DA requereu um elevado número de iterações para atingir o critério preestabelecido. Esse tipo de comportamento é característico dos métodos baseados da DB, que podem apresentar instabilidade quando próximo da convergência do algoritmo.

Contudo, no PMO de Junho, a DA convergiu em um menor tempo computacional em comparação ao método de PH, embora tenha requerido um maior número de iterações. Tal fato pode ser associado ao menor tempo computacional por iteração requerido para DA, como também observado das Tabelas 21 à 24.

De forma complementar a essa análise, um estudo interessante seria adotar o tempo de processamento da DA como critério de parada para o método de PH e, assim, avaliar a qualidade da solução do mesmo com base no critério de convergência proposto  $D_{iter}$ .

Portanto, na Tabela 34 estão apresentados os resultados desse estudo somente para o mês de Junho, onde o método de PH apresentou um pior desempenho em relação à DA.

**Tabela 34. Comparação entre os algoritmos para uma árvore de cenários de grande porte com critério de parada associado ao tempo de processamento da DA - Junho.**

Decomposição	Tempo de CPU (h:m)	Iter	Função Objetivo (Bilhões \$)	Erro - $D_{iter}$
DA	12:19	18	34,741	0,0009%
PH	12:01	6	34,744	7.397

Como era esperado, o critério de convergência definido previamente para o método de PH não foi atingido. Então, com o intento de melhor avaliar a qualidade da solução do método de PH, na Figura 43 estão mostrados os desvios absolutos em relação aos valores metas de forma análoga àquela apresentada na Seção 5.3.1.1.

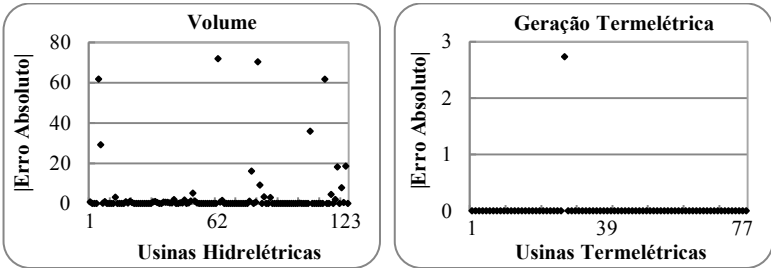


Figura 43. Desvio Absoluto Mês de Junho para um critério de parada alternativo - associado ao tempo de processamento da DA.

Com base na Figura 43, note que os desvios ainda são bastante elevados, embora estejam próximos de zero para algumas usinas. Vale comentar que duas ou três iterações adicionais (depende do PMO) resultam em valores de  $D_{iter}$  na ordem de  $10^2$ , como ilustrado na Figura 44. Logo, podem proporcionar uma redução considerável aos erros absolutos destacados acima.

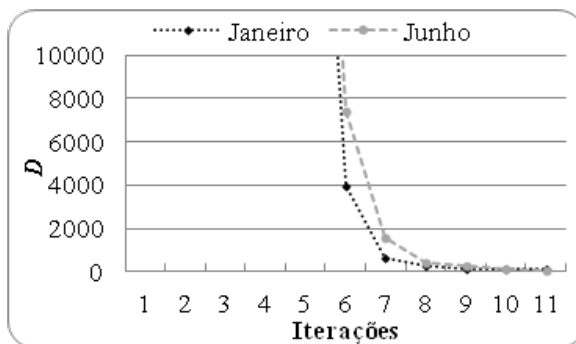


Figura 44. Evolução do critério  $D_{iter}$ .

Esses resultados ajudam a demonstrar a competitividade do método de PH, lembrando ainda que é possível utilizar técnicas de partida para melhorar seu desempenho, de forma similar à apresentada por Santo *et al.* (2009).

Para finalizar a análise dos métodos em função da modelagem de incertezas semanais, é interessante observar comparativamente os resultados das Tabelas 32 e 33 com aqueles das Tabelas 23 e 24. Note que há diferenças nos custos esperados de operação em função da modelagem das realizações semanais, que impactam em novas políticas (níveis distintos de armazenamento dos reservatórios ao final do horizonte de estudo, como comentado anteriormente) e, por conseguintes, em distintos custos esperados operativos para o sistema.

De maneira complementar, nas Figuras 45 e 46 estão apresentados os CMOs médios para a semana inicial do horizonte de planejamento, considerando os dois modelos da árvore de cenários (com ou sem incertezas semanais).

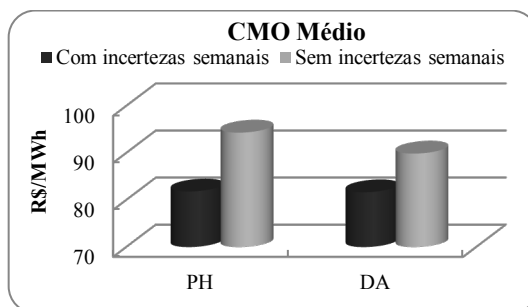


Figura 45. Análise comparativa dos CMOs entre as metodologias e também considerando os casos com e sem incertezas semanais - Janeiro.

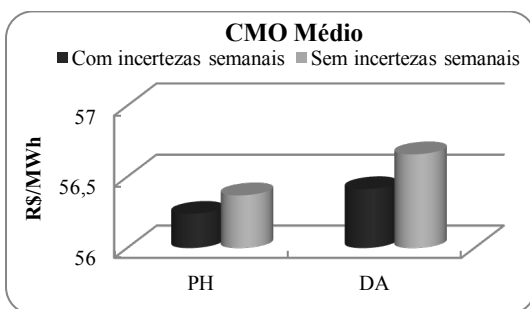


Figura 46. Análise comparativa dos CMOs entre as metodologias e também considerando os casos com e sem incertezas semanais - Junho.

Assim como no caso do horizonte de planejamento estendido, modelar as incertezas nas semanas do primeiro mês acarretam políticas operativas distintas e, conseqüentemente, CMO distintos em relação ao estudo em que essas incertezas são desprezadas. Desse modo, a representação adequada das características do problema pode realmente trazer benefícios aos resultados dos modelos utilizados no SEB, ainda que seja necessária uma análise exaustiva de casos.

Ademais, neste tipo de abordagem, é importante balancear os ganhos associados aos resultados e os custos computacionais inerentes à nova modelagem, até mesmo para indicar um número satisfatório ou ideal de realizações por estágio do horizonte de planejamento.

### • Programação Paralela

Neste tópico, as versões paralelas de ambos os métodos são comparadas. Antes, contudo, o algoritmo da DA é apresentado, seguindo a mesma ideia destacada para o método de PH. Dito de outra forma, a finalidade básica do algoritmo consiste em alocar as tarefas de forma ótima entre os processadores (*cores*), a fim de reduzir o esforço computacional associado a cada um deles. Contudo, diferentemente do método de PH em que a alocação de tarefas está associada à quantidade de cenários que devem ser solucionados, o propósito inicial na DA consiste em alocar subárvores da árvore original entre os processadores, de modo que cada uma delas seja solucionada separadamente.

ALGORITMO PARALELO - DA:

- Passo 0:* Inicialmente, todos os dados comuns aos processadores devem ser carregados
- Passo 1:* O processador "mestre" associa subárvores do problema com os processadores, incluindo ele mesmo, e, assim, envia as correspondentes tarefas a cada processador "escravo"
- Passo 2:* Uma vez recebidas as tarefas, cada processador resolve o subproblema para um conjunto específico de dados, inicialmente relacionado com a etapa de recursão direta
- Passo 3:* O passo seguinte corresponde a enviar as soluções de cada subproblema observando que a troca de informação deve ser adequada (somente para os nós sucessores) a fim de reduzir o esforço computacional relacionado com o MPI
- Passo 4:* Com os resultados dos subproblemas, os processadores escravos devem enviar as devidas informações para o processador mestre de modo que seja possível avaliar a convergência do algoritmo
- Passo 5:* Caso não tenha sido alcançada a convergência, a etapa de recursão inversa deve ser iniciada, respeitando o conjunto de subárvores previamente alocadas entre os processadores no passo 1
- Passo 6:* Construção dos Cortes de Benders
- Passo 7:* Ao final de etapa de recursão inversa, retornar ao passo 2.

A etapa 6 é determinante para o sucesso do algoritmo. É nessa etapa que existe a troca de informações entre os processadores para a criação dos Cortes de Benders. Logo, atenção especial deve ser direcionada a mesma, no sentido de evitar possíveis prejuízos ao desempenho do algoritmo da DA.

Em virtude dessas minúcias relacionadas aos algoritmos de programação paralela descritos neste documento, tanto no método de PH quanto na DA, as resoluções dos subproblemas de PQ ou PL representam a maior parte do esforço computacional dos algoritmos (80% do tempo total de processamento para o método de PH e aproximadamente 75% para o DA).

O desempenho dos algoritmos está mostrado nas Tabelas 35 e 36, onde foram utilizados os dois núcleos Intel Xeon X5680 (12 processadores no total).

**Tabela 35. Comparação entre os métodos considerando o algoritmo de programação paralela dos métodos- Janeiro.**

Decomposição	Tempo de		Função Objetivo (Bilhões \$)	Erro - $D$
	CPU (h:m)	Iter		
DA	01:32	56	57,889	0,0009%
PH	02:45	11	57,882	99

**Tabela 36. Comparação entre os métodos considerando o algoritmo de programação paralela dos métodos - Junho.**

Decomposição	Tempo de		Função Objetivo (Bilhões \$)	Erro - $D$
	CPU (h:m)	Iter		
DA	01:17	18	34,741	0,0009%
PH	06:16	11	34,746	69

Embora tenham sido observados ganhos em ambos os métodos de decomposição, a DA requereu os menores tempos computacionais nos dois PMOs, diferentemente do ocorrido no algoritmo serial, onde o método de PH foi mais eficiente no PMO de Janeiro.

A fim de ilustrar esses resultados, o *speed-up* dos métodos é apresentado nas Figuras 47 e 48 para os meses de Janeiro e Junho, respectivamente.

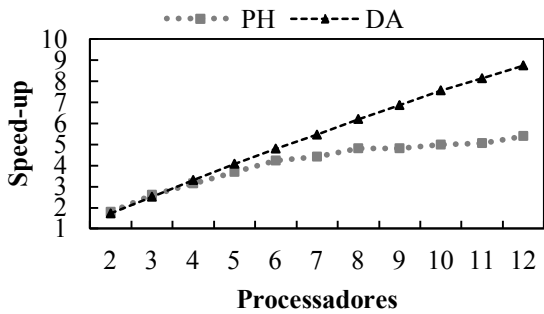


Figura 47. *Speed-up* para o mês de Janeiro.



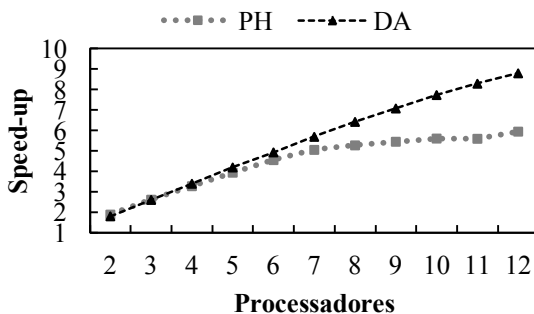


Figura 48. *Speed-up* para o mês de Junho.

Com base nas figuras acima, é interessante observar a disparidade de desempenho dos algoritmos de programação paralela dos métodos. Conforme comentado na Subseção 5.3.1.2, o algoritmo do método de PH apresenta ganhos lineares no início do processo, mas estabiliza com o incremento do número de processadores. Esse fato é decorrente da troca acentuada de dados entre processadores a cada iteração, determinando um aumento no tempo de comunicação entre eles, que pode superar 10% do tempo total de processamento. Uma possibilidade para reduzir tal esforço computacional seria minimizar a troca de informações, porém com um consequente aumento no requerimento de memória. Logo, nesse tipo de programação, é importante avaliar o *trade-off* entre processamento e uso de memória.

Além disso, outros fatores determinantes para o incremento no tempo computacional do método de PH são: (i) a resolução do problema dual; (ii) a atualização do valor meta, que, dependendo do tamanho do problema, pode requerer até 5% do tempo computacional total.

Por sua vez, a DA apresenta um ganho praticamente linear até o número máximo de doze processadores. A partir desse momento, o rendimento diminui na medida em que são utilizados mais processadores com o uso da tecnologia *hyper-thread* (MICROSOFT, 2002)<sup>7</sup>, como destacado na Figura 49.

<sup>7</sup> Com essa particularidade dos processadores Intel é possível administrar dois processadores virtuais para cada núcleo e, assim, compartilhar a carga de processamento entre eles, com uma perda intrínseca de processamento em virtude do uso dessa tecnologia. Fato que também colabora para a redução do rendimento.

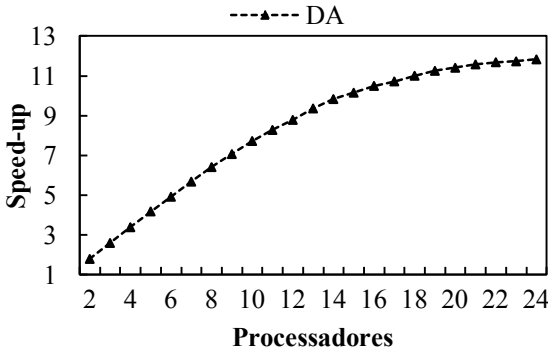


Figura 49. *Speed-up* DA para um número elevado de processadores.

5.3.2.3 *Horizonte de Planejamento Estendido*

Além dos aspectos relacionados com as incertezas semanais abordados na seção acima, outro importante detalhe prospectivo abordado neste trabalho se refere ao horizonte de planejamento do PMO. Assim, nos resultados discutidos a seguir, o mesmo problema estudado na Seção 5.3.1.3 é adotado.

Inicialmente é importante destacar as consequências desse estudo no tamanho do problema, como mostrado na Tabela 37. Os números associados ao ED apresentados visam, sobretudo, demonstrar o porte do problema de PL.

**Tabela 37. Tamanhos dos problemas/subproblemas do PMO.**

Métodos	Nº Variáveis	Nº Restrições
ED	6.049.641	22.153.428
DA	1.151	2.355
PH	13.951	23.183

Diante desses aspectos, os resultados para a DA e o método de PH via o algoritmo de programação paralela estão mostrados da Tabela 38 à Tabela 42, onde foram consideradas diferentes árvores de cenários (diferentes sementes) geradas com base nos dados dos PMOs dos meses subsequentes ao mês de Janeiro.

**Tabela 38. Comparação entre os algoritmos quando o horizonte de planejamento é estendido - Semente 1.**

Decomposição	Tempo de CPU (h:m)	Iter	Função Objetivo (Bilhões \$)	Erro - $D$
DA	02:36	100	59,744	0,36%
PH	02:04	21	59,410	97

**Tabela 39. Comparação entre os algoritmos quando o horizonte de planejamento é estendido - Semente 2.**

Decomposição	Tempo de CPU (h:m)	Iter	Função Objetivo (Bilhões \$)	Erro - $D$
DA	02:34	100	60,139	0,32%
PH	02:16	23	59,780	96

**Tabela 40. Comparação entre os algoritmos quando o horizonte de planejamento é estendido - Semente 3.**

Decomposição	Tempo de CPU (h:m)	Iter	Função Objetivo (Bilhões \$)	Erro - $D$
DA	02:54	100	59,086	0,34%
PH	02:10	22	58,827	97

**Tabela 41. Comparação entre os algoritmos quando o horizonte de planejamento é estendido - Semente 4.**

Decomposição	Tempo de CPU (h:m)	Iter	Função Objetivo (Bilhões \$)	Erro - $D$
DA	02:48	100	59,697	0,30%
PH	01:46	19	59,395	97

**Tabela 42. Comparação entre os algoritmos quando o horizonte de planejamento é estendido - Semente 5.**

Decomposição	Tempo de CPU (h:m)	Iter	Função Objetivo (Bilhões \$)	Erro - $D$
DA	02:50	100	59,842	0,29%
PH	02:07	23	59,589	98

Em linhas gerais, o tempo requerido pelo método de PH foi aproximadamente 24% inferior quando comparado com a DA, considerando o limite máximo de 100 iterações.

Nesse sentido, os resultados apresentados acima são de grande importância para o desenvolvimento do modelo atualmente utilizado no PMO. Note que em virtude do aumento do horizonte de estudo, a DA apresentou uma maior instabilidade em seu processo de convergência, atingindo o limite máximo de iterações sem que tenha convergido. Essa característica é frequentemente apresentada na literatura como uma das desvantagens dos métodos baseados na DB.

De forma a ilustrar esses comentários, na Figura 50 está mostrado o processo iterativo da DA. Após a décima iteração, os ganhos são quase que irrelevantes; ou seja, há praticamente uma estabilização dos valores dos custos superiores e inferiores, prejudicando a convergência do algoritmo.

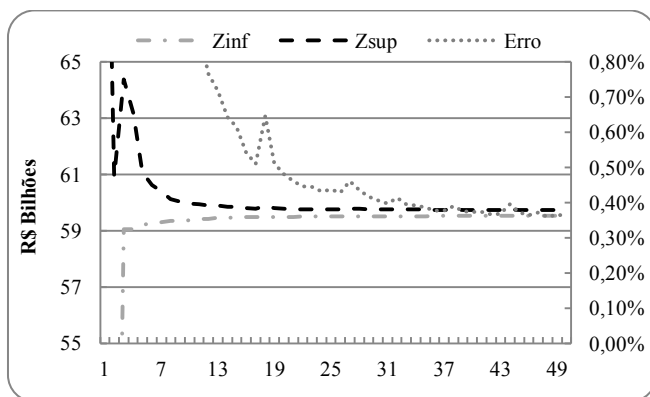


Figura 50. Processo iterativo da DA.

Desse modo, é conveniente reforçar que o uso do método do método de PH pode ser bastante competitivo quando são estudadas diferentes configurações de um mesmo problema de programação estocástica, embora também apresente algumas limitações (heurísticas, por exemplo).

Ademais, tendo em vista a possibilidade da adoção futura de um modelo único de PL estocástico considerando um horizonte de dois ou três anos de estudo, algo similar ao proposto por Jacobs *et al.* (1995) para o sistema Norte Americano, o uso do algoritmo da DA pode apresentar complicações e/ou instabilidades numéricas quando aplicado

na solução do problema do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos. Em outras palavras, a utilização de outro método de decomposição pode ser mandatória, caso seja realmente necessário à adoção de um horizonte de estudo igual a dois ou mais anos. Nesse contexto, o método de PH é uma alternativa potencial, sem que haja prejuízo à qualidade da solução do problema.

Finalizando o estudo comparativo entre a DA e o método de PH, nas Figuras 51, 52 e 53 estão apresentados os perfis de geração das usinas hidrelétricas, das usinas termelétricas e os CMOs, respectivamente, para primeira semana de estudo e considerando a primeira semente.

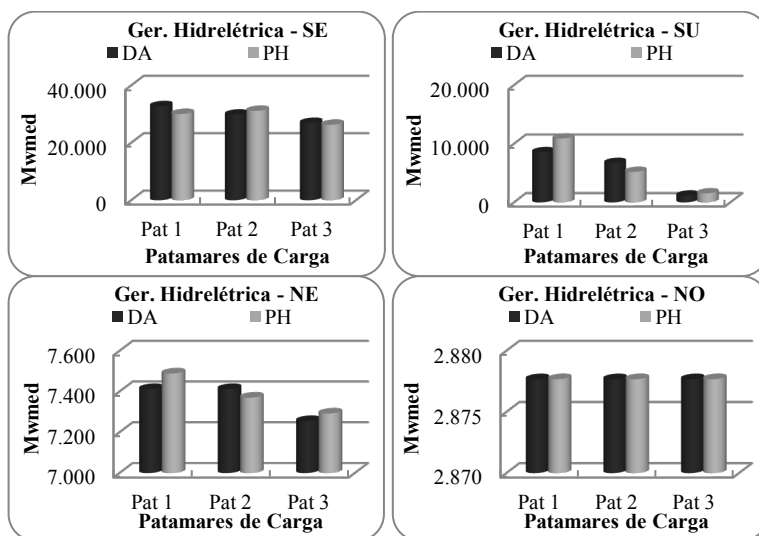


Figura 51. Perfis das gerações das usinas hidrelétricas para o primeiro estágios do horizonte de estudo por subsistema.

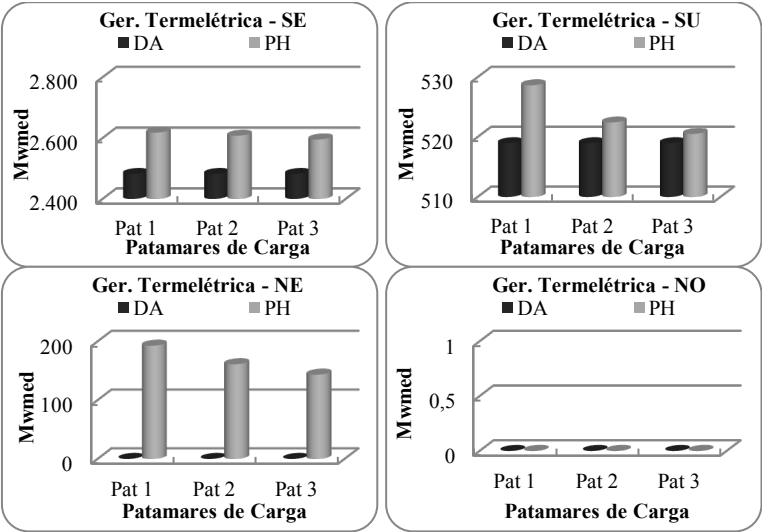


Figura 52. Perfis das gerações das usinas termelétricas para o primeiro estágios do horizonte de estudo por subsistema.

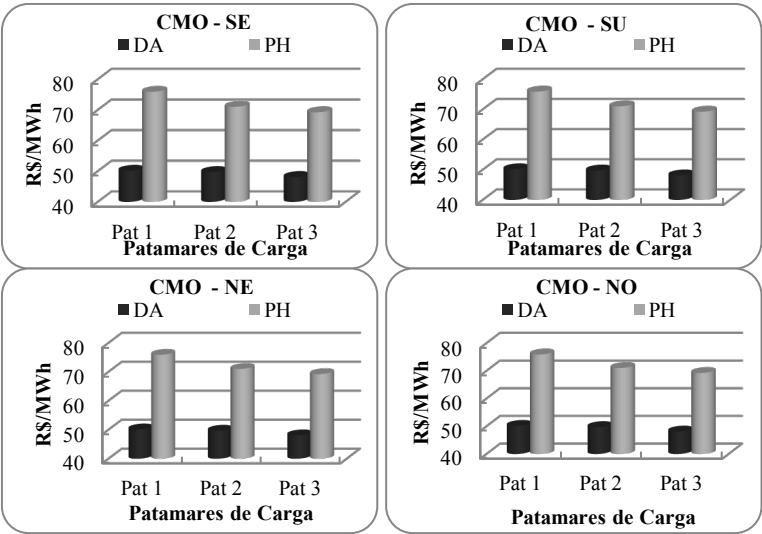


Figura 53. CMOs para o primeiro estágios do horizonte de estudo por subsistema.

De forma análoga aos custos esperados de operação, existem diferenças nos resultados dos métodos de decomposição. Vale relembrar

que a DA não atingiu o critério de convergência preestabelecido e, portanto, seus resultados podem ainda não ter atingido o valor ótimo.

Por fim, ressalta-se que os elevados CMOs resultantes do método de PH estão diretamente associados ao maior uso de usinas termelétricas na operação do sistema nesse método.

## 5.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo foram apresentados os resultados dos modelos computacionais desenvolvidos quando aplicados ao problema do PMO e algumas variações no tocante à árvore de cenários associada ao mesmo.

Inicialmente, uma breve apresentação do SIN foi destacada, de modo a contextualizar o problema e facilitar a compreensão dos resultados.

Em seguida, o estudo de casos foi discutido em duas partes: (i) análise comparativa entre diferentes estratégias de decomposição via PH, considerando importantes características do método, como heurísticas associadas ao parâmetro de penalidade e técnicas de partida quente; (ii) estudo comparativo entre o método de PH e DA, onde árvores de cenários com números diferentes de realizações e horizonte de planejamento foram utilizadas.

Com respeito aos esquemas de decomposição via PH, é possível destacar o desempenho computacional da estratégia alternativa proposta, que consiste em relaxar somente as variáveis de estado do problema: os volumes dos reservatórios. De uma maneira geral, os resultados foram melhores em relação à Decomposição Clássica, especialmente quando foram analisados em problema de grande porte; ou seja, que resultam em problemas duais com um elevado número de variáveis (horizonte de estudo estendido). Nesse contexto, também convém destacar seu desempenho em função da aplicação do algoritmo de programação paralela.

Ainda com relação do algoritmo do método de PH, vale ressaltar a aplicação de heurísticas para atualização iterativa do parâmetro de penalidade, em vez da utilização do tradicional parâmetro fixo, bem como o uso das técnicas de partida quente. Em ambos os estudos, as melhorias no tocante ao desempenho computacional são significativas.

Com relação ao estudo comparativo entre o método de PH e a DA, Caso 2, inicialmente foram apresentados os resultados com base nos mesmos dados utilizados nos PMOs. Nesses estudos, a DA apresenta, em geral, os melhores desempenhos computacionais, embora

o método de PH sempre tenha apresentado resultados bastante similares. Nesse ponto, é conveniente comentar que uma análise no que diz respeito ao número de aproximações usadas na construção da FPH influencia o desempenho dos métodos, em especial, o método de PH. O aumento no número de restrições de desigualdade faz com o método de PH demande um maior tempo computacional por iteração, impactando no desempenho global do método.

Também com base nos resultados do Caso 2, é possível afirmar que a DA comporta-se de maneira instável em seu processo de convergência na medida em que o tamanho do problema cresce, como observado para o mês de Janeiro no caso em que diversas realizações foram também modeladas nas semanas do primeiro mês do horizonte de estudo.

Esses resultados foram ratificados nos estudos com um horizonte igual a nove estágios (horizonte estendido), em que foram observados com mais clareza instabilidades na convergência do algoritmo da DA para diferentes sementes da árvore de cenários; ou seja, não convergiu para o critério preestabelecido considerando o limite máximo de iterações. Em contrapartida, o método de PH atingiu a convergência em um tempo computacional 25% menor em comparação a DA. Ainda é importante comentar que nesses estudos comparativos entre os métodos (Caso 2) não foram utilizadas técnicas de partida quente para acelerar e/ou melhorar o desempenho de nenhum deles. Esse fato ressalta o potencial do método de PH na solução de problemas do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de grande porte, uma vez que é mais natural usar esse tipo de estratégia em métodos baseados no LA.

Portanto, é possível concluir que para problemas estocásticos com um grande número de estágios, o método de PH é uma alternativa bastante competitiva em relação à DA. Diferentemente da DA, o método de PH apresentou uma maior estabilidade em seu processo de convergência, ainda que seja necessário estudar heurísticas para melhorar o desempenho de seu algoritmo de solução.

De forma complementar a análise do desempenho computacional dos métodos de decomposição, também foram discutidos os resultados das políticas resultantes dos mesmos. Nesse contexto, destaca-se o estudo do impacto de diferentes modelagens da FPH nas decisões de geração das usinas do sistema, bem como nos valores dos CMOs. Por exemplo, houve uma redução de 24% em média nos CMOs associados à primeira semana quando a FPH foi modelada pela produtibilidade em vez de uma função linear por partes composta por 15 aproximações lineares. Isso demonstra que um estudo investigativo no sentido de



encontrar o total de pontos necessários para representar, de forma adequada, a FPH é importante para a qualidade da solução do problema.

As políticas resultantes dos métodos apresentaram pequenas diferenças, mas com uma coerência operativa. Contudo, no caso do horizonte de estudo estendido, distinções mais significativas foram observadas em virtude da atuação de um critério preestabelecido (número máximo de iterações) que não permitiu a convergência do algoritmo da DA.

Por fim, vale comentar que foram também apresentadas sugestões de algoritmos de programação paralela para ambos os métodos, os quais proporcionaram ganhos computacionais significativos ao desempenho dos mesmos, com destaque para aquele associado à DA.



## **CAPÍTULO 6**

### **CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

---

#### **6.1 INTRODUÇÃO**

Neste capítulo, pretende-se abordar, de forma resumida, os principais aspectos discutidos ao longo de todo o documento, destacando as contribuições e inovações mais relevantes, bem como os resultados mais importantes alcançados.

Ainda neste capítulo, algumas sugestões para desenvolvimentos futuros são também apresentadas a fim de balizar novas pesquisas associadas ao tema ou aqueles afins.

#### **6.2 CONCLUSÕES**

Este trabalho está inserido, considerando a cadeia de modelos adotada no Brasil, no contexto do problema do Programa Mensal da Operação Energética – PMO. De forma sucinta, o objeto consiste em avaliar as particularidades e o desempenho computacional do algoritmo do método de PH quando aplicado na solução do PMO e compará-lo com uma implementação do algoritmo da DA, método atualmente vigente.

Tendo em vista as características estocásticas do PMO, no Capítulo 2 foram destacados importantes aspectos com relação à

representação das incertezas em problemas de despacho hidrotérmico com auxílio de um exemplo numérico simplificado. Nesse contexto, conceitos que ressaltam a relevância dos estudos associados à PE são introduzidos, como, por exemplo, o cálculo do Valor da Solução Estocástica - VSE e o Valor Esperado da Informação Perfeita - VEIP. De forma complementar, a formulação clássica de um problema estocástico, a representação das incertezas e estrutura de dados dessa classe de problemas foi apresentada.

De acordo com o conteúdo abordado no Capítulo 2, os diferentes grupos de métodos de otimização estocásticos multiestágios foram introduzidos no Capítulo 3. Em seguida, os algoritmos do método de PH e DA, efetivamente implementados neste trabalho, foram descritos, enfatizando as contribuições propostas no que concerne especialmente ao método de PH. Nesses termos, convém comentar as diferentes estratégias descritas para decompor o problema estocástico original via o método de PH, cujo intuito é prover ganhos ao desempenho computacional do método.

O problema do PMO é o foco do Capítulo 4. Aspectos relativos à modelagem desse problema são descritos, entre os quais se destacam: a representação dos patamares de carga, acoplamento com o PEN e a FPH linear por partes. O modo como as incertezas são representadas no modelo PMO é também destacado. Por fim, a formulação do problema global para cada um dos algoritmos descritos no Capítulo 3 é apresentada, com base nas características operativas apresentadas previamente.

Uma vez apresentado os métodos de PE estudados e suas características intrínsecas, o Capítulo 5 foi dedicado à apresentação dos resultados do modelo computacional desenvolvido para ambos os métodos quando aplicados ao SIN, nos estudos que envolvem o problema do PMO.

No estudo de casos, diferentes PMOs de 2009 foram avaliados. Nesse sentido, além de uma análise respeitando as características atuais do modelo DECOMP, também foram efetuados estudos prospectivos no que concerne às implementações que futuramente podem ser incorporadas ao modelo atual, como por exemplo: diversas realizações nas semanas do primeiro mês do PMO e a extensão do horizonte de estudo a fim de proporcionar uma melhor representação da realidade e, por conseguinte, um acoplamento mais tardio com a FCF. Os principais aspectos observados nesse estudo foram: os tempos computacionais, a qualidade da solução dos métodos para o critério previamente

estabelecido e os valores dos custos esperados de operação no horizonte estudado.

Efetivamente, o estudo de casos foi dividido em duas etapas: (i) estudos relacionados com o método de PH; (ii) análise comparativa entre o método de PH e a DA.

No que diz respeito ao método de PH, destacam-se os resultados da Decomposição Alternativa proposta sem prejuízo à qualidade da solução do problema. Essa estratégia consiste em relaxar somente as variáveis associadas ao armazenamento dos reservatórios. Convém lembrar que esse fato torna-se possível em virtude das características do problema que tem o acoplamento entre estágios (temporal) associado a essa variável, que é, portanto, a variável de estado do problema. Com relação aos aspectos práticos do método, convém destacar a inserção de heurísticas para atualização iterativa do parâmetro de penalidade, em vez de usar um valor constante como é bastante difundido na literatura. Ainda no tocante ao método de PH, é importante também comentar a possibilidade da utilização de técnicas de partida quente no sentido de propiciar um melhor desempenho computacional do método, especialmente quando o foco é o caso brasileiro onde a cada semana é feita uma revisão do planejamento para o restante do mês inicial, com o intento de incorporar novas perspectivas futuras com relação às vazões afluentes aos reservatórios do sistema.

A partir dos resultados da primeira etapa, uma análise comparativa entre o método de PH e a DA foi efetuada. De uma maneira geral, os resultados demonstraram que o método de PH sempre apresentou bons resultados, podendo ser útil em problema de grande porte com um horizonte de planejamento superior ao considerado atualmente e quando são também consideradas incertezas semanais. Nos estudos com horizonte de planejamento estendido, a DA apresentou com mais frequência instabilidade em seu processo de convergência quando próximo da solução ótima, parado pelo limite máximo de iterações, o que é uma das limitações dos métodos baseados em planos cortantes frequentemente abordadas na literatura.

Ainda nesse contexto comparativo, convém ressaltar o impacto do número de aproximações da FPH no desempenho computacional dos métodos, bem como nas políticas resultantes de ambos. Em geral, o método de PH tende a demandar um maior esforço computacional dado o aumento no número de restrições de desigualdade associada à FPH em relação à DA. Isso se deve ao incremento de restrições por subproblema que é consideravelmente superior em comparação com a DA, uma vez

que os mesmos estão relacionados com os cenários e não aos nós, como é o caso da DA.

Por fim, é conveniente ressaltar os resultados da implementação da programação paralela de ambos os métodos. Esse fato reforça o potencial dos mesmos quando utilizados na solução o problema do PMO, ainda que melhorias possam ser obtidas nos algoritmos de programação paralela desenvolvidos neste trabalho.

### 6.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho apresentou diversos estudos que contribuem para o contínuo desenvolvimento e aperfeiçoamento das técnicas e metodologias de PE aplicadas na solução de problemas estocásticos de grande porte relacionados com planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos.

Contudo, outros aspectos importantes não abordados neste trabalho podem ser ainda analisados no âmbito desse tema. O primeiro e talvez o mais importante esteja relacionado com qualidade da solução da árvore de cenários do modelo estocástico atualmente considerado. Nesse sentido, é particularmente interessante utilizar um modelo computacional que possibilite o uso/leitura de diversas possibilidades da árvore de cenário (dado de entrada do modelo), como é o caso dos desenvolvidos neste trabalho, e, assim, investigar a qualidade da solução estocástica atual, sendo irrelevante, nessa fase, a metodologia de solução utilizada. Essa tarefa exige um enorme esforço computacional, pois um número considerável de casos deve ser analisado. Ainda nesse assunto, as representações matemáticas das variáveis aleatórias também podem ser alvo de novos estudos. É possível destacar a análise dos métodos utilizados para geração dos cenários, como por exemplo: o modelo ARP, o modelo auto-regressivo média móvel, o *Box-Jenkins*, entre outros (ANUKAL CHIRALAKSANAKUL, 2003).

Com relação às características do PMO, é possível pesquisar a adoção de um único modelo de programação da operação com um horizonte de dois ou três anos, contemplando todas as características do sistema e modelando as usinas de forma individualizada. Esse fato pode reduzir os problemas associados ao acoplamento de modelos com características distintas. Desse modo, a ideia consiste em desenvolver um único modelo no qual exista a possibilidade de refinar a representação das características do sistema na medida em que o estágio de decisão se aproxima do instante de sua implementação. Em outras

palavras, corresponde a desenvolver um modelo computacional que tenha uma representação mais simplificada nos estágios mais distantes da operação e mais detalhada quando mais próximo da operação, priorizando os aspectos técnicos operativos do sistema (não linearidades, descontinuidades, entre outros). Logo, distintos períodos (dias, semanas e meses) devem ser associados aos estágios ao longo do horizonte total de estudo.

Em virtude da crescente participação de fontes termelétricas e alternativas como as usinas eólicas (incertezas associadas ao vento sem a possibilidade de armazenamento) na matriz energética brasileira, considerar a demanda também como uma fonte de incerteza pode ser relevante para a operação do sistema nos próximos anos. Assim, além da estocasticidade associadas às vazões afluentes, a carga também deveria ser modelada como uma variável aleatória do problema do PMO.

No que diz respeito aos métodos de solução, alguns aspectos podem ser elencados. Por exemplo, investigações de técnicas para acelerar a convergência da DA por meio da inserção de alguns Cortes de Benders iniciais que pode proporcionar ganhos substanciais ao desempenho computacional do mesmo e, por outro lado, avaliar a utilização de outras técnicas de partida quente para o método de PH.

No caso do método de PH, algumas peculiaridades do algoritmo podem ser estudadas. Como exemplo, é possível citar a resolução do problema dual por meio de outros métodos matematicamente mais robustos, como é o método de Feixes, embora alguns autores defendam a ideia de que a utilização do método do gradiente é suficiente em vista das características do método de PH.

Adicionalmente, alguns pesquisadores têm estudado técnicas heurísticas para acelerar a convergência do algoritmo do método de PH. Nesse sentido, é possível comentar a análise iterativa dos desvios entre os valores metas e as respectivas variáveis relaxadas. O mecanismo consiste em identificar aquelas variáveis que têm apresentado o comportamento constante com o decorrer das iterações. Consequentemente, tais variáveis, assim como seus valores metas, são igualadas a um valor comum para todas as demais iterações do processo. Esse procedimento evita um possível "zig-zag" das variáveis e podem prover resultados satisfatórios, como destacado por Watson e Woodruff (2010). Seguindo esse raciocínio, outra possibilidade para acelerar a convergência do algoritmo consiste na atualização gradativa dos valores metas logo que cada subproblema for solucionado. Isso corresponde ao uso da chamada iteração de Jacobi (LAU e WOMERSLEY, 2001).

Ainda com relação ao método de PH, é possível investigar seu uso no contexto amostral. Ou seja, para problemas com um grande número de cenários, o propósito seria utilizar técnicas para amostrá-los e resolvê-los seguindo a mesma ideia da PDDE. Nesse caso, seria importante estudar critérios de parada do algoritmo, bem como avaliar a qualidade da solução do mesmo.

A aplicação do método de PH na solução do problema do PMO pode proporcionar ainda algumas vantagens com respeito à operação do sistema. Inicialmente, é possível comentar a possibilidade de atualização iterativa da FPH em virtude do volume armazenado no reservatório. Em outras palavras, a cada nova iteração, reconstruir a FPH para novos valores de volume atualizados sem que haja prejuízo metodológico ao algoritmo. Assim, torna-se possível otimizar de melhor forma o uso dos recursos armazenados nos reservatórios. A aplicação desse procedimento pode não ser tão direta na DA uma vez que a atualização da FPH muda a região viável do problema e, por conseguinte, os Cortes de Benders previamente criados ao longo do processo iterativo podem não ser mais válidos e/ou viáveis para o problema com novas restrições.

Tendo em vista que os subproblemas resultantes do método de PH são quadráticos, há possibilidade de representar os custos incrementais das usinas termelétricas por meio de uma função quadrática, que retrata de melhor forma a relação entre o uso do combustível e o custo de operação associado.

Por fim, no contexto mais atual no que diz respeito à PE, pode-se estudar a inserção de uma estratégia que considere uma aversão a risco, como, por exemplo, o *Value at risk* - VaR ou o *Conditional Value at Risk* - CVaR na formulação do problema. Desse modo, seria possível ter uma melhor medida de risco para o problema, tornando também possível efetuar análises em horizontes mais extensos atribuindo também menor importância para a FCF.



## APÊNDICE A.

### EXEMPLO NUMÉRICO DOS MÉTODOS DE DECOMPOSIÇÃO

---

#### A.1 INTRODUÇÃO

Neste apêndice, tem-se o propósito de detalhar as principais etapas dos algoritmos de solução apresentados no Capítulo 3, com base no mesmo exemplo numérico apresentado na Seção 2.2. Desse modo, é possível comparar os resultados dos algoritmos estudados com aqueles apresentados na Tabela 5, os quais se referem a solução do ED do problema estocástico proposto.

#### A.2 DECOMPOSIÇÃO ANINHADA

Conforme apresentado no Capítulo 3, a DA possibilita a decomposição do problema estocástico original em subproblemas menores, os quais representam cada um dos nós da árvore de cenários de fluências do problema, conforme detalhado na sequência.

- 1º Estágio:

$$f_1 = \min 10gt_{11} + 25gt_{21} + 75gt_{31} + 200gt_{41} + \alpha_2,$$

$$\text{s.a: } gt_{11} + gt_{21} + gt_{31} + gt_{41} = 450,$$

$$v_2 + q_1 = 50,$$

$$gt_{11} \leq 10, gt_{21} \leq 30, gt_{31} \leq 60;$$

(90)

- 2º Estágio - cenário a:

$$f_2^a = \min 10gt_{12}^a + 25gt_{22}^a + 75gt_{32}^a + 200gt_{42}^a,$$

$$\text{s.a: } gt_{12}^a + gt_{22}^a + gt_{32}^a + gt_{42}^a + q_2^a = 450,$$

$$v_3^a + q_2^a - v_2 = 500,$$

$$gt_{12}^a \leq 10, gt_{22}^a \leq 30, gt_{32}^a \leq 60;$$

(91)

- 2º Estágio - cenário  $b$ :

$$f_2^b = \min 10gt_{12}^b + 25gt_{22}^b + 75gt_{32}^b + 200gt_{42}^b,$$

$$\text{s.a: } gt_{12}^b + gt_{22}^b + gt_{32}^b + gt_{42}^b + q_2^b = 450,$$

$$v_3^b + q_2^b - v_2^b = 500,$$

$$gt_{12}^b \leq 10, gt_{22}^b \leq 30, gt_{32}^b \leq 60;$$
(92)

- 2º Estágio - cenário  $c$ :

$$f_2^c = \min 10gt_{12}^c + 25gt_{22}^c + 75gt_{32}^c + 200gt_{42}^c,$$

$$\text{s.a: } gt_{12}^c + gt_{22}^c + gt_{32}^c + gt_{42}^c + q_2^c = 450,$$

$$v_3^c + q_2^c - v_2^c = 500,$$

$$gt_{12}^c \leq 10, gt_{22}^c \leq 30, gt_{32}^c \leq 60;$$
(93)

De acordo com o algoritmo de solução, a ideia é resolver o subproblema correspondente ao estágio 1, obter a informação que acopla os estágios,  $v_2$ , e, por conseguinte, resolver os subproblemas relativos ao segundo estágio individualmente. Assim, a primeira recursão direta apresenta os resultados ilustrados pela Figura 54.

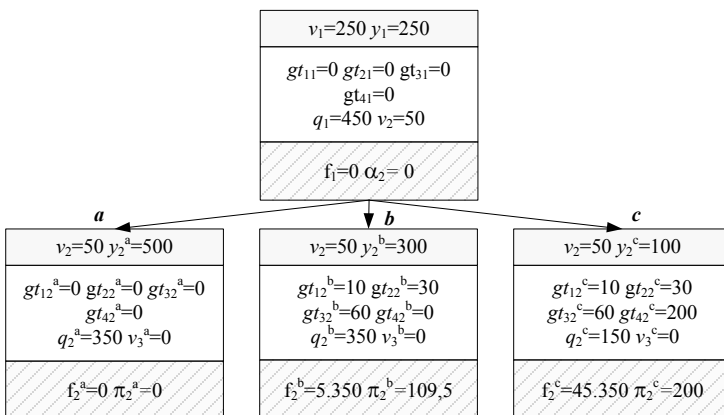


Figura 54. Primeira recursão direta.

Ao final de toda recursão direta, a convergência tem ser avaliada. Nesse contexto, o custo total de primeiro estágio deve ser comparado com o valor esperado do custo total de operação e, caso o erro entre

esses valores esteja dentro de um intervalo fixado previamente, a convergência pode ser decretada.

Nesse caso, o valor do custo total de primeiro estágio  $f_1$  é igual a zero. O custo de primeiro estágio é chamado de custo inferior por ser o custo associado a um problema relaxado que vai tendo restrições adicionadas à medida que ocorrem as iterações do algoritmo. Como a cada iteração do algoritmo novas restrições são adicionadas ao problema, ele torna-se menos relaxado e o custo inferior não pode diminuir com o número de iterações.

Por outro lado, o valor esperado do custo total ou custo superior é igual a R\$ 16.900,00. De forma análoga ao custo de primeiro estágio, o custo superior, que corresponde a solução viável do problema, tende a diminuir com o número de iterações, pois cada problema resolvido é mais restrito do que o correspondente da iteração anterior do algoritmo. Matematicamente, ele pode ser calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} z_{\text{sup}} &= (f_1 - \alpha_2) + \frac{1}{3}(f_{2a} + f_{2b} + f_{2c}), \\ z_{\text{sup}} &= 16.900,00. \end{aligned} \quad (94)$$

Portanto, como há uma diferença considerável entre ambos, pode-se afirmar que ainda não convergiu. Em virtude da simplicidade do exemplo, a convergência será estabelecida quando ambos os valores foram idênticos.

O passo seguinte consiste em "construir" o corte de Benders ou corte otimalidade, a qual valoriza o uso dos recursos de geração hidrelétrica no segundo estágio em função da decisão prévia de primeiro estágio,  $v_2$  igual a 50 hm<sup>3</sup>. Matematicamente, tal corte pode ser representado por:

$$\alpha_2 - \left( \frac{1}{3}\pi_2^a + \frac{1}{3}\pi_2^b + \frac{1}{3}\pi_2^c \right) v_2 \geq f - \left( \frac{1}{3}\pi_2^a + \frac{1}{3}\pi_2^b + \frac{1}{3}\pi_2^c \right) v_2^0 \quad (95)$$

Substituindo os respectivos valores dos multiplicadores de Lagrange e das variáveis de acoplamento temporal,  $v_2$ , na Inequação (95), tem-se:

$$\alpha_2 + 47,5v_2 \geq 1530 \quad (96)$$

Essa etapa corresponde à recursão inversa. Essa informação deve ser adicionada ao subproblema de primeiro estágio e uma nova recursão direta pode ser inicializada. A Figura 55 a seguir mostra os resultados da segunda recursão direta.

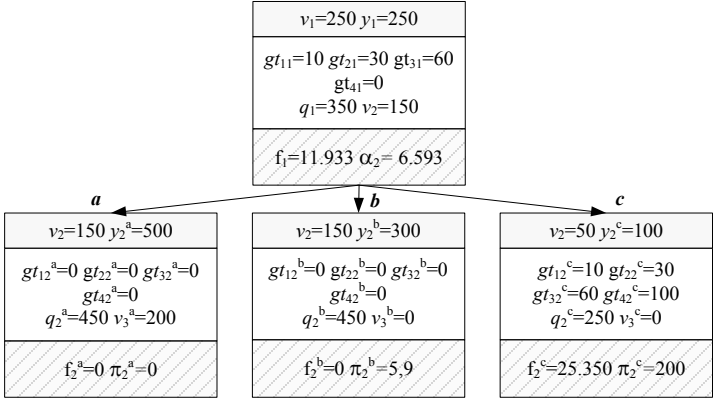


Figura 55 Segunda recursão direta.

De acordo com o algoritmo de solução da DA apresentado no Capítulo 3 (vide Figura 10), é fácil perceber que o processo ainda não atingiu o critério preestabelecido. Logo, uma nova iteração (recurso inversa seguida outra recursão direta) deve ser efetuada.

A Figura a seguir mostra a convergência do processo. Note que o valor do custo ao final é exatamente igual àquele resultante do ED, R\$ 13.750,00.

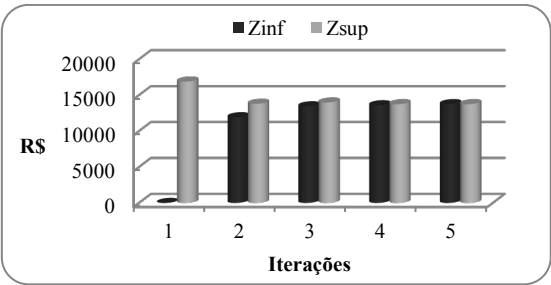


Figura 56. Convergência da DA.

### A.3 PROGRESSIVE HEDGING

De forma contrária a DA, o método de PH decompõe o problema estocástico em diferentes subproblemas correspondes aos cenários, os quais são coordenados pelas restrições de não-antecipatividade. Tais restrições garantem que todas as decisões no estágio 1 sejam idênticas. A fim de ilustrar tal raciocínio, observe a Figura 57.

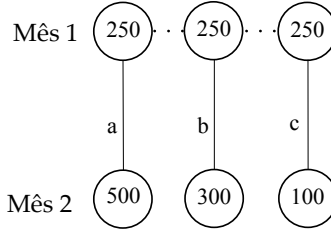


Figura 57. Árvore de cenários do exemplo proposto.

Note que no primeiro estágio, todos os cenários apresentam as mesmas realizações e, por conseguinte, deve resultar em decisões iguais, as quais são garantidas pela não-antecipatividade (pontilhado na Figura 57), embora diferentes realizações estejam associadas ao segundo estágio.

Logo, o Problema (4)-(5) apresentado na Seção 2.2, no qual as restrições de não-antecipatividade foram modeladas de forma implícita, pode ser reformulado por cenário, considerando as restrições de não-antecipatividade de maneira explícita, conforme destacado em (97)-(99).

$$\begin{aligned}
 F = \min \quad & \frac{1}{3}(10gt_{11}^a + 25gt_{21}^a + 75gt_{31}^a + 200gt_{41}^a \\
 & + 10gt_{12}^a + 25gt_{22}^a + 75gt_{32}^a + 200gt_{42}^a) \\
 & + \frac{1}{3}(10gt_{11}^b + 25gt_{21}^b + 75gt_{31}^b + 200gt_{41}^b \\
 & + 10gt_{12}^b + 25gt_{22}^b + 75gt_{32}^b + 200gt_{42}^b) \\
 & + \frac{1}{3}(10gt_{11}^c + 25gt_{21}^c + 75gt_{31}^c + 200gt_{41}^c \\
 & + 10gt_{12}^c + 25gt_{22}^c + 75gt_{32}^c + 200gt_{42}^c)
 \end{aligned} \tag{97}$$

$$\begin{aligned}
& \text{s.a.: } gt_{11}^a + gt_{21}^a + gt_{31}^a + gt_{41}^a + q_1^a = 450, \\
& \quad \textcolor{red}{v}_2^a + q_1^a = 500, \\
& \quad gt_{11}^a \leq 10, gt_{21}^a \leq 30, gt_{31}^a \leq 60, \\
& \quad gt_{12}^a + gt_{22}^a + gt_{32}^a + gt_{42}^a + q_2^a = 450, \\
& \quad v_3^a + q_2^a - \textcolor{red}{v}_2^a = 500, \\
& \quad gt_{12}^a \leq 10, gt_{22}^a \leq 30, gt_{32}^a \leq 60, \\
& \quad gt_{11}^b + gt_{21}^b + gt_{31}^b + gt_{41}^b + q_1^b = 450, \\
& \quad \textcolor{red}{v}_2^b + q_1^b = 500, \\
& \quad gt_{11}^b \leq 10, gt_{21}^b \leq 30, gt_{31}^b \leq 60, \\
& \quad gt_{12}^b + gt_{22}^b + gt_{32}^b + gt_{42}^b + q_2^b = 450, \\
& \quad v_3^b + q_2^b - \textcolor{red}{v}_2^b = 300, \\
& \quad gt_{12}^b \leq 10, gt_{22}^b \leq 30, gt_{32}^b \leq 60, \\
& \quad gt_{11}^c + gt_{21}^c + gt_{31}^c + gt_{41}^c + q_1^c = 450, \\
& \quad \textcolor{red}{v}_2^c + q_1^c = 500, \\
& \quad gt_{11}^c \leq 10, gt_{21}^c \leq 30, gt_{31}^c \leq 60, \\
& \quad gt_{12}^c + gt_{22}^c + gt_{32}^c + gt_{42}^c + q_2^c = 450, \\
& \quad v_3^c + q_2^c - \textcolor{red}{v}_2^c = 100, \\
& \quad gt_{12}^c \leq 10, gt_{22}^c \leq 30, gt_{32}^c \leq 60, \\
& \quad gt_{11}^a = \bar{gt}_{11}, gt_{21}^a = \bar{gt}_{21}, gt_{31}^a = \bar{gt}_{31}, gt_{41}^a = \bar{gt}_{41}, \\
& \quad q_1^a = \bar{q}_1, v_2^a = \bar{v}_2, \\
& \quad gt_{11}^b = \bar{gt}_{11}, gt_{21}^b = \bar{gt}_{21}, gt_{31}^b = \bar{gt}_{31}, gt_{41}^b = \bar{gt}_{41}, \\
& \quad q_1^b = \bar{q}_1, v_2^b = \bar{v}_2, \\
& \quad gt_{11}^c = \bar{gt}_{11}, gt_{21}^c = \bar{gt}_{21}, gt_{31}^c = \bar{gt}_{31}, gt_{41}^c = \bar{gt}_{41}, \\
& \quad q_1^c = \bar{q}_1, v_2^c = \bar{v}_2.
\end{aligned} \tag{98}$$

$$\begin{aligned}
& \tag{99}
\end{aligned}$$

em que,

$$\begin{aligned}
\bar{g}t_{11} &= \frac{1}{3}(gt_{11}^a + gt_{11}^b + gt_{11}^c), \bar{g}t_{21} = \frac{1}{3}(gt_{21}^a + gt_{21}^b + gt_{21}^c), \\
\bar{g}t_{31} &= \frac{1}{3}(gt_{31}^a + gt_{31}^b + gt_{31}^c), \bar{g}t_{41} = \frac{1}{3}(gt_{41}^a + gt_{41}^b + gt_{41}^c), \\
\bar{q}_1 &= \frac{1}{3}(q_1^a + q_1^b + q_1^c), \bar{v}_2 = \frac{1}{3}(v_2^a + v_2^b + v_2^c).
\end{aligned} \tag{100}$$

Escrevendo a função LA do problema, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Theta = \min F &+ \frac{1}{3} \left[ \pi_{1a}(gt_{11}^a - \bar{g}t_{11}) + \pi_{2a}(gt_{21}^a - \bar{g}t_{21}) + \pi_{3a}(gt_{31}^a - \bar{g}t_{31}) \right. \\
&+ \pi_{4a}(gt_{41}^a - \bar{g}t_{41}) + \pi_{5a}(q_1^a - \bar{q}_1) + \pi_{6a}(v_2^a - \bar{v}_2) + \pi_{1b}(gt_{11}^b - \bar{g}t_{11}) \\
&+ \pi_{2b}(gt_{21}^b - \bar{g}t_{21}) + \pi_{3b}(gt_{31}^b - \bar{g}t_{31}) + \pi_{4b}(gt_{41}^b - \bar{g}t_{41}) + \pi_{5b}(q_1^b - \bar{q}_1) \\
&+ \pi_{6b}(v_2^b - \bar{v}_2) + \pi_{1c}(gt_{11}^c - \bar{g}t_{11}) + \pi_{2c}(gt_{21}^c - \bar{g}t_{21}) + \pi_{3c}(gt_{31}^c - \bar{g}t_{31}) \\
&+ \pi_{4c}(gt_{41}^c - \bar{g}t_{41}) + \pi_{5c}(q_1^c - \bar{q}_1) + \pi_{6c}(v_2^c - \bar{v}_2) \left. \right] \\
&+ \frac{1}{2} \mu \left\{ \frac{1}{3} \left[ (gt_{11}^a - \bar{g}t_{11})^2 + (gt_{21}^a - \bar{g}t_{21})^2 + (gt_{31}^a - \bar{g}t_{31})^2 \right. \right. \\
&+ (gt_{41}^a - \bar{g}t_{41})^2 + (q_1^a - \bar{q}_1)^2 + (v_2^a - \bar{v}_2)^2 + (gt_{11}^b - \bar{g}t_{11})^2 \\
&+ (gt_{21}^b - \bar{g}t_{21})^2 + (gt_{31}^b - \bar{g}t_{31})^2 + (gt_{41}^b - \bar{g}t_{41})^2 + (q_1^b - \bar{q}_1)^2 \\
&+ (v_2^b - \bar{v}_2)^2 + (gt_{11}^c - \bar{g}t_{11})^2 + (gt_{21}^c - \bar{g}t_{21})^2 + (gt_{31}^c - \bar{g}t_{31})^2 \\
&\left. \left. + (gt_{41}^c - \bar{g}t_{41})^2 + (q_1^c - \bar{q}_1)^2 + (v_2^c - \bar{v}_2)^2 \right] \right\}, \tag{101}
\end{aligned}$$

s.a: (98).

Analisando a função objetivo (101), é possível perceber que a função LA não é separável em cenários, uma vez que a média das variáveis associada a cada um dos cenários, representada por (100), é função dos demais cenários. Para sobrepujar essa dificuldade, as não-antecipatividades são “substituídas” por valores constantes, chamadas nesse trabalho de valores metas, permitindo, desse modo, que os subproblemas correspondentes aos cenários sejam solucionados de forma independente. É importante comentar que tais valores devem ser

atualizados iterativamente. Assim, o subproblema resultante do processo de decomposição do método de PH, correspondente ao cenário  $a$  da Figura 57, pode ser escrito do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
 \phi_a = & \min 10gt_{11}^a + 25gt_{21}^a + 75gt_{31}^a + 200gt_{41}^a \\
 & + 10gt_{12}^a + 25gt_{22}^a + 75gt_{32}^a + 200gt_{42}^a \\
 & + \pi_{1a}(gt_{11}^a - \bar{gt}_{11}) + \pi_{2a}(gt_{21}^a - \bar{gt}_{21}) + \pi_{3a}(gt_{31}^a - \bar{gt}_{31}) \\
 & + \pi_{4a}(gt_{41}^a - \bar{gt}_{41}) + \pi_{5a}(q_1^a - \bar{q}_1) + \pi_{6a}(v_2^a - \bar{v}_2) \\
 & + \frac{1}{2}\mu \left[ (gt_{11}^a - \bar{gt}_{11})^2 + (gt_{21}^a - \bar{gt}_{21})^2 + (gt_{31}^a - \bar{gt}_{31})^2 \right. \\
 & \left. + (gt_{41}^a - \bar{gt}_{41})^2 + (q_1^a - \bar{q}_1)^2 + (v_2^a - \bar{v}_2)^2 \right], \\
 \text{s. a.: } & gt_{11}^a + gt_{21}^a + gt_{31}^a + gt_{41}^a + q_1^a = 450, \\
 & v_2^a + q_1^a = 500, \\
 & gt_{11}^a \leq 10, gt_{21}^a \leq 30, gt_{31}^a \leq 60, \\
 & gt_{12}^a + gt_{22}^a + gt_{32}^a + gt_{42}^a + q_2^a = 450, \\
 & v_3^a + q_2^a - v_2^a = 500, \\
 & gt_{12}^a \leq 10, gt_{22}^a \leq 30, gt_{32}^a \leq 60.
 \end{aligned} \tag{102}$$

Os subproblemas correspondentes aos demais cenários apresentam a mesma estrutura do problema (102)-(103), o que facilita a implementação do algoritmo do método de PH.

De forma resumida, a estratégia inicial de solução do método de PH consiste em solucionar todos os subproblemas quadráticos resultantes da decomposição, para um vetor inicial de multiplicadores de Lagrange e dos valores metas previamente definidas. Ao final dessa etapa, todas as variáveis são atualizadas, bem como os valores metas respectivas.

No exemplo proposto, foi utilizado um vetor inicial de multiplicadores de Lagrange e valores metas iguais a zero. Os resultados para a 1ª iteração do método de PH, considerando o parâmetro de penalidade  $\mu$  igual a 1, são mostrados na Tabela 43.



**Tabela 43. 1ª iteração do método de PH.**

Usina	Cenário <i>a</i>	Cenário <i>b</i>	Cenário <i>c</i>
$gt_{11}$	10	10	10
$gt_{21}$	30	30	30
$gt_{31}$	60	60	60
$gt_{41}$	0	0	66,66
$q_1$	350	350	283,33
$v_2$	150	150	216,66
$gt_{12}$	0	0	10
$gt_{22}$	0	0	30
$gt_{32}$	0	0	60
$gt_{42}$	0	0	33,33
$q_2$	450	450	316,66
$v_3$	200	0	0
Custo de Operação (R\$)	13.800,00		

Com base nos dados apresentados na Tabela 43, o passo seguinte consiste em calcular os novos valores metas, conforme apresentado na Tabela 44

**Tabela 44. Valores metas ao final da 1ª iteração.**

Valores Metas	$t=1$
$gt_{11}$	10
$gt_{21}$	30
$gt_{31}$	60
$gt_{41}$	22,22
$q_1$	327,77
$v_2$	172,22

Conforme discutido no Capítulo 3, a sequência do processo iterativo corresponde à resolução do problema dual. No algoritmo clássico de solução do método de PH é utilizado o método do gradiente, como exemplificado a seguir:

$$\pi^{iter+1} = \pi^{iter} + \mu(gt_{11}^a - \bar{gt}_{11}). \quad (104)$$

Assim, o vetor de multiplicadores ao final da primeira iteração é dado pelos valores destacados na Tabela 45.

**Tabela 45. Multiplicadores de Lagrange resultante da solução do problema dual do final da 1ª iteração.**

Variáveis duais	Cenário <i>a</i>	Cenário <i>b</i>	Cenário <i>c</i>
$\pi_{1s}$	0	0	0
$\pi_{2s}$	0	0	0
$\pi_{3s}$	0	0	0
$\pi_{4s}$	-44,44	-44,44	88,88
$\pi_{5s}$	44,44	44,44	-88,88
$\pi_{6s}$	-44,44	-44,44	88,88

De posse dos novos multiplicadores e dos valores metas correspondentes, é possível iniciar uma nova iteração. Esse processo é repetido até que valores preestabelecidos como critérios de convergência sejam atingidos (nesse caso, a norma do gradiente foi utilizada como critério de convergência, a qual pode ser um bom critério de convergência uma vez que consegue mensurar, de forma aproximada, a viabilidade primal da solução).

O resultado final do algoritmo pode ser visualizado na Tabela 46.

**Tabela 46. Solução ótima do método de PH.**

Usina	Cenário <i>a</i>	Cenário <i>b</i>	Cenário <i>c</i>
$gt_{11}$	10	10	10
$gt_{21}$	30	30	30
$gt_{31}$	48,60	48,60	48,60
$gt_{41}$	0	0	0
$q_1$	361,40	361,40	361,40
$v_2$	138,60	138,60	138,60
$gt_{12}$	0	10	10
$gt_{22}$	0	1,40	30
$gt_{32}$	0	0	60
$gt_{42}$	0	0	111,40
$q_2$	450	438,60	238,60
$v_3$	188,60	0	0
Custo de Operação (R\$)	R\$ 13.750,00		

A custo de operação ótimo resultante do método de PH é igual à solução do ED e da DA apresentados anteriormente, R\$ 13.750,00.

De forma ilustrativa, a Figura 58 mostra a evolução da norma do gradiente até o final do processo iterativo. Note que a convergência é estabelecida quando a norma do gradiente é igual a zero, ao final da 10ª

iteração. Isso significa que as variáveis primais de primeiro estágio tenderam ao valor médio das variáveis relaxadas, ou seja, viabilidade primal foi alcançada.

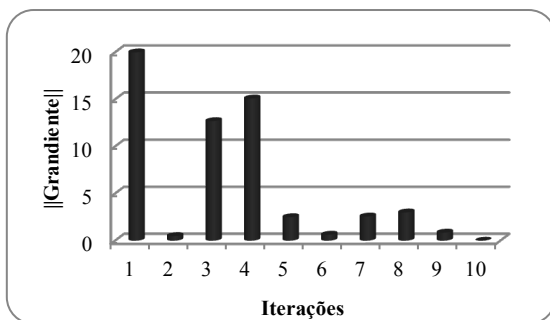


Figura 58. Norma do vetor gradiente.



## APÊNDICE B.

### MÉTODOS ALTERNATIVOS PARA RESOLVER OS SUBPROBLEMAS QUADRÁTICOS RESULTANTES DO PROGRESSIVE HEDGING

---

#### B.1 INTRODUÇÃO

Em geral, os subproblemas quadráticos resultantes do método de PH são resolvidos por meio de softwares de programação quadrática. Contudo, a estrutura esparsa da matriz e suas características favorecem o uso de outros métodos de decomposição com o intuito de melhorar o desempenho computacional do algoritmo. Assim, nesse Apêndice tem-se o foco de apresentar esquemas alternativos de decomposição para os subproblemas correspondentes aos cenários.

De maneira resumida, o propósito consiste em decompor os subproblemas quadráticos por cenários em distintos estágios com o uso de equações dinâmicas, as quais correspondem a variáveis artificiais inseridas ao problema com o intuito de acoplar as restrições entre estágios.

Assim, é possível reescrever o Problema (41), por exemplo, com o uso de variáveis artificiais  $y_1^s$ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Phi^s &= \min f^s + \pi^s (y_1^s - \bar{y}) + \frac{\mu}{2} \|y_1^s - \bar{y}\|^2, \\ \text{s.t: } \widehat{A}_1^s x_1^s + \widehat{A}_1^s y_1^s &= b_1^s \\ B_2^s y_1^s + A_2^s x_2^s &= b_2^s, \\ y_1^s - \hat{y}_1^s &= 0, \\ x_1^s \geq 0, x_2^s \geq 0, y_1^s \geq 0, \hat{y}_1^s &\geq 0. \end{aligned} \tag{105}$$

Observe que  $y_1^s$  é igual a  $y_1^s$ , o que viabiliza o desacoplamento entre estágios. De outra forma, a inserção da variável artificial resultou em dois distintos conjuntos de restrições e variáveis, cada um correspondente a um específico estágio do horizonte de planejamento.

Na sequência, dois algoritmos com características distintas são usados: (i) Relaxação Lagrangeana; (ii) Lagrangeano Aumentado.

Nesse ponto, vale ressaltar que essas estratégias podem ser realmente úteis em problemas com um horizonte de estudo extenso, ou seja, um elevado número de estágios<sup>8</sup>.

## B.2 RELAXAÇÃO LAGRANGEANA

De acordo com esse método, a estratégia matemática para alcançar a decomposição é relaxar as restrições adicionais por meio de um vetor de multiplicadores de Lagrange,  $\lambda$ . Assim, o problema resultante pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Theta^s &= \min \Phi^s + \lambda \left( y_1^s - \hat{y}_1^s \right), \\ \text{s.t: } \hat{A}_1^s x_1^s + \hat{A}_1^s y_1^s &= b_1^s \\ B_2^s \hat{y}_1^s + A_2^s x_2^s &= b_2^s, \\ x_1^s \geq 0, x_2^s \geq 0, y_1^s \geq 0, \hat{y}_1^s &\geq 0. \end{aligned} \tag{106}$$

Com base nas propriedades já apresentadas anteriormente, o problema (106) pode ser efetivamente separável em subproblemas correspondentes aos estágios, conforme descrito abaixo:

$$\Theta^s = \Theta_1^s + \Theta_2^s, \tag{107}$$

em que,

$$\begin{aligned} \Theta_1^s &= \min p^s c_1^s x_1^s + \pi^s \left( y_1^s - \bar{y} \right) + \frac{\mu}{2} \|y_1^s - \bar{y}\|^2 + \lambda y_1^s, \\ \text{s.t: } \hat{A}_1^s x_1^s + \hat{A}_1^s y_1^s &= b_1^s, \\ x_1^s \geq 0, y_1^s &\geq 0, \end{aligned} \tag{108}$$

e

---

<sup>8</sup> Um estudo de casos preliminar foi efetuado nesse trabalho, porém os resultados não foram competitivos quando comparado com os algoritmos apresentados no Capítulo 3, embora melhorias tenham sido observadas na medida em que o horizonte de análise era aumentado.

$$\begin{aligned}
 \Theta_2^s &= \min p^s c_2^s x_2^s - \lambda \hat{y}_1^s, \\
 \text{s.t. } B_2^s \hat{y}_1^s + A_2^s x_2^s &= b_2^s, \\
 x_2^s &\geq 0, \hat{y}_1^s \geq 0.
 \end{aligned} \tag{109}$$

Em virtude das restrições de não-antecipatividade, que são somente asseguradas no primeiro estágio, os subproblemas resultantes de segundo estágio não são quadráticos. Assim, os subproblemas (108) e (109) devem ser solucionados de acordo com o seguinte algoritmo:

ALGORITMO B2:

<i>Passo 0</i>	Considerando uma tolerância $\eta > 0$ , para cada cenário $s$ , escolher o vetor inicial $\lambda$ e definir <i>iter</i> igual 1;
<i>Passo 1</i>	Resolver (108) e (109) considerando todos os parâmetros previamente definidos para o método de modo a encontrar $\hat{y}_1^s$ e $y_1^s$ ;
PH, de	
<i>Passo 2</i>	Atualizar $\lambda_{iter+1} = \lambda_{iter} + \rho(y_{iter} - \hat{y}_{iter})$ ;
<i>Passo 3</i>	Se
	$G_i = \ y_{1,i}^s - \hat{y}_{1,i}^s\ ^2 \leq \eta$ ,
	ou $iter = iter_{max}$ , então pare. Se não, atualize <i>iter</i> e retorne ao passo 1.

$$(110)$$

É importante destacar que baseado no teorema da convergência apresentado por Rockfellar e Wets (1991), os subproblemas podem ser solucionados aproximadamente. Portanto, o valor de  $\eta$  pode ser ajustado de tal forma que a precisão desejada seja alcançada no processo de convergência. Esse fato pode ser considerado como outra importante vantagem desse tipo de algoritmo.

### B.3 LAGRANGEANO AUMENTADO

Assim como apresentado no Capítulo 3, a ideia é relaxar um conjunto de restrições por meio de um vetor de multiplicadores e ainda penalizar o termo quadrático dos mesmos, decompondo, nesse caso, os subproblemas determinísticos correspondentes aos cenários em subproblemas associados os estágios. Então, o problema LA pode ser representado por:

$$\begin{aligned}
\Theta^s &= \min \Phi^s + \lambda (y_1^s - \hat{y}_1^s) + \frac{1}{2} \rho \|y_1^s - \hat{y}_1^s\|^2, \\
\text{s.t. } &\hat{A}_1^s x_1^s + \hat{A}_1^s y_1^s = b_1^s \\
&B_2^s \hat{y}_1^s + A_2^s x_2^s = b_2^s, \\
&x_1^s \geq 0, x_2^s \geq 0, y_1^s \geq 0, \hat{y}_1^s \geq 0,
\end{aligned} \tag{111}$$

com outro parâmetro de penalidade  $\rho$  também maior que zero.

Nesse caso, para atingir a separabilidade entre estágios, pode ser utilizado o Princípio do Problema Auxiliar - PPA (COHEN, 1980). O PPA aproxima cada termo quadrático de (111) da seguinte maneira:

$$(y_1^s - \hat{y}_1^s)^2 = \left( y_1^s - \frac{y_{1,i}^s + \hat{y}_{1,i}^s}{2} \right)^2 + \left( \hat{y}_1^s - \frac{y_{1,i}^s + \hat{y}_{1,i}^s}{2} \right)^2, \tag{112}$$

É importante lembrar que, uma vez atualizados, esses valores são, então, utilizados na iteração seguinte até que novos valores das variáveis sejam encontrados.

Nesse contexto, usando (112), o valor da função objetivo do problema pode ser avaliado resolvendo individualmente cada subproblema:

$$\Theta^s = \Theta_1^s + \Theta_2^s, \tag{113}$$

em que,

$$\begin{aligned}
\Theta_1^s &= \min p^s c_1^s x_1^s + \pi^s (y_1^s - \bar{y}) + \frac{\mu}{2} \|y_1^s - \bar{y}\|^2 \\
&+ \lambda y_1^s + \frac{\rho}{2} \left\| y_1^s - \frac{y_{1,i}^s + \hat{y}_{1,i}^s}{2} \right\|^2, \\
\text{s.t. } &\hat{A}_1^s x_1^s + \hat{A}_1^s y_1^s = b_1^s, \\
&x_1^s \geq 0, y_1^s \geq 0,
\end{aligned} \tag{114}$$

e



$$\begin{aligned}
\Theta_2^s &= \min p^s c_2^s x_2^s - \lambda \hat{y}_1^s + \frac{\rho}{2} \left\| \hat{y}_1^s - \frac{y_{1,i}^s + \hat{y}_{1,i}^s}{2} \right\|^2, \\
\text{s.t. } B_2^s \hat{y}_1^s + A_2^s x_2^s &= b_2^s, \\
x_2^s &\geq 0, \hat{y}_1^s \geq 0.
\end{aligned} \tag{115}$$

Observe que diferentemente da RL, o subproblema de segundo estágio também é quadrático em virtude dos termos associados ao LA.

Um algoritmo baseado no método dos multiplicadores (BERTSEKAS, 1995) pode ser utilizado para maximizar a função dual do problema por meio dos seguintes passos:

**ALGORITMO B3:**

- Passo 0* Considerando uma tolerância  $\eta > 0$ ,  $\rho > 0$ , escolher para cada cenário  $s$ , um vetor inicial  $\lambda$ ,  $\hat{y}_1^s$  e  $y_1^s$ . Definir *iter* igual 1;
- Passo 1* Resolver (114) para obter  $y_1^s$ . Atualizar (112) considerando o novo valor de  $y_1^s$ . Em seguida, resolver (115) a fim de encontrar  $\hat{y}_1^s$  e atualizar novamente (112);
- Passo 2* Calcular  $\lambda_{iter+1} = \lambda_{iter} + \rho(y_{iter} - \hat{y}_{iter})$ ;
- Passo 3* Se
- $$G_i = \|y_{1,iter}^s - \hat{y}_{1,iter}^s\|^2 \leq \eta, \tag{116}$$
- ou  $iter = iter_{max}$ , então pare. Se não, atualize *iter* e retorne ao passo 1.

De forma similar à LR aproximação, os subproblemas (114) e (115) não precisam ser solucionados de maneira exata. Esse fato possibilita uma rápida convergência dos subproblemas correspondentes aos cenários  $s$  priorizando, dessa forma, os aspectos relacionados com o método de PH.



## APÊNDICE C.

### CÁLCULO DAS ENERGIAS ARMAZENADAS E AFLUENTES

---

#### C.1 INTRODUÇÃO

Nesse apêndice, breves aspectos relacionados com o cálculo das energias armazenada e afluentes são apresentados ilustrativamente com base em um exemplo de três usinas em cascatas localizadas em um mesmo subsistema. Detalhes com relação ao cálculo dessas grandezas podem ser encontrados, por exemplo, em um artigo escrito por Terry *et al.* (1986) ou manual do modelo NEWAVE (CEPEL, 2010a).

#### C.2 ENERGIA ARMAZENADA

Como comentado no corpo do documento, a Energia Armazenada por subsistema é uma forma aproximada de representar a quantidade de energia armazenada nos reservatórios do sistema disponível para consumo. Portanto, no cálculo dessa grandeza a quantidade de água armazenada ( $\text{hm}^3$ ) é transformada em energia de acordo com a produtibilidade e altura média da queda da usina e de todas à jusante em um mesmo subsistema.

A fim de ilustrar o cálculo, na Figura 59 é apresentado um conjunto de usinas hidrelétricas localizadas em uma mesma cascata.

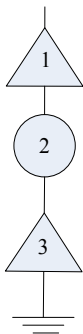


Figura 59. Usinas localizadas em uma mesma cascata.

Supondo que  $\rho$  represente a produtividade e  $h$  corresponde a altura média da queda (calculada em função das cotas de montante e jusante em um reservatório), a Energia Armazenada nesse subsistema pode ser representada por:

$$ea = v_1 (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) + v_3 (\rho_3 h_3). \quad (117)$$

É importante lembrar que, nesse caso,  $v$  representa o volume útil do reservatório.

### C.3 ENERGIA AFLUENTE

De forma similar, a Energia Afluente visa valorar a quantidade de volume afluente a um determinado subsistema em termos de energia potencialmente "consumível". Logo, para o sistema em questão, a Energia Afluente pode se descrita como:

$$eaf = a_1 (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) + a_2 (\rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) + a_3 (\rho_3 h_3). \quad (118)$$

Note que nesse cálculo são consideradas também as usinas fio d'água.

## APÊNDICE D.

### IMPACTOS DO TEMPO DE VIAGEM NO ALGORITMO DE SOLUÇÃO DA DECOMPOSIÇÃO ANINHADA

Neste apêndice serão abordados os detalhes relativos às consequências do tempo de viagem da água entre aproveitamentos na metodologia de solução da Decomposição Aninhada - DA. A fim de tornar a apresentação mais fluente, o auxílio de um exemplo numérico torna-se imprescindível.

Desse modo, o exemplo corresponde à operação de sistemas hidrotérmicos composto de duas usinas hidrelétricas em cascata e uma usina termelétrica com custo incremental igual a  $c$  R\$/MWh, similar ao problema de curto prazo, embora bastante simplificado. O objetivo é atender uma demanda,  $L_t$  em cada estágio  $t$  (semanas e meses), durante um horizonte igual dois meses (cinco semanas e um mês). Por simplificação, o caráter estocástico do modelo será desprezado, ou seja, as afluências incrementais aos reservatórios,  $a$ , serão consideradas determinísticas (conhecidas). A Figura 60 a seguir ilustra o problema.

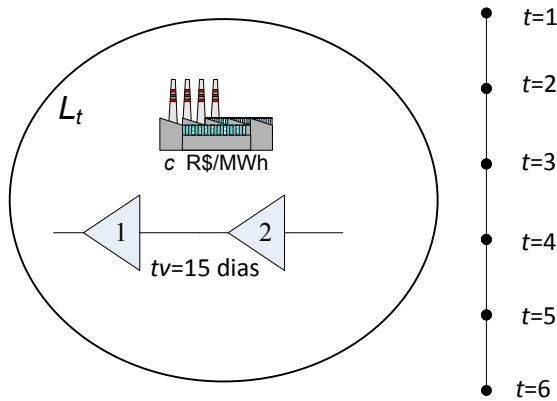


Figura 60. Configuração hidrotérmica e árvore de cenários.

Observe que no exemplo proposto existe tempo de viagem da água de 15 dias entre as usinas hidrelétricas. Na prática, parte da vazão defluente na usina 1 no estágio 1 será incrementado a vazão natural da usina 2 somente no estágio 3 (cada estágio corresponde a 7 dias). Isso representa uma dificuldade adicional ao problema tendo em vista o incremento no número de variáveis de estado. Nesse ponto, convém comentar que o tempo de viagem de 15 dias trata-se de uma simplificação do processo físico, que é bem mais complexo. Além da defasagem temporal, existe o amortecimento e, adicionalmente, o tempo de viagem não é o mesmo para todas as condições de vazão.

Desse modo, com base nos aspectos acima apresentados, a formulação completa do problema pode ser visualizada na sequência, a fim ilustrar as principais diferenças com o problema em que são desprezados os tempos de viagem da água.

$$f = \min c \, gt_{11} + c \, gt_{12} + c \, gt_{13} + c \, gt_{14} + c \, gt_{15} + c \, gt_{16} \quad (119)$$

s.a:

$$gt_{11} + gh_{11} + gh_{21} = L_1,$$

$$v_{12} + q_{11} + sp_{11} = v_{11} + a_{11} ,$$

$$v_{22} + q_{21} + sp_{21} = v_{21} + a_{21} ,$$

$$v_{12} \leq v_1^{\max}, v_{22} \leq v_2^{\max}, q_{11} \leq q_1^{\max}, q_{21} \leq q_2^{\max} ,$$

$$gt_{11} \leq gt^{\max}, gh_{11} \leq gh_1^{\max}, gh_{21} \leq gh_2^{\max}, sp_{11} \geq 0, sp_{21} \geq 0,$$

$$gt_{12} + gh_{12} + gh_{22} = L_2,$$

$$v_{13} + q_{12} + sp_{12} - v_{12} = a_{12} ,$$

$$v_{23} + q_{22} + sp_{22} - v_{22} = a_{22} ,$$

$$v_{13} \leq v_1^{\max}, v_{23} \leq v_2^{\max}, q_{12} \leq q_1^{\max}, q_{22} \leq q_2^{\max} ,$$

$$gt_{12} \leq gt^{\max}, gh_{12} \leq gh_1^{\max}, gh_{22} \leq gh_2^{\max}, sp_{12} \geq 0, sp_{22} \geq 0,$$

$$gt_{13} + gh_{13} + gh_{23} = L_3,$$

$$v_{14} + q_{13} + sp_{13} - v_{13} = a_{13} ,$$

$$v_{24} + q_{23} + sp_{23} - k_1 (q_{11} + sp_{11}) - v_{23} = a_{23} ,$$

$$v_{14} \leq v_1^{\max}, v_{24} \leq \bar{v}_2, q_{13} \leq q_1^{\max}, q_{23} \leq q_2^{\max} ,$$

$$gt_{13} \leq gt^{\max}, gh_{13} \leq gh_1^{\max}, gh_{23} \leq gh_2^{\max}, sp_{13} \geq 0, sp_{23} \geq 0, \quad (120)$$

$$\begin{aligned}
gt_{14} + gh_{14} + gh_{24} &= L_4, \\
v_{15} + q_{14} + sp_{14} - v_{14} &= a_{14}, \\
v_{25} + q_{24} + sp_{24} - k_2(q_{11} + sp_{11}) - k_1(q_{12} + sp_{12}) - v_{24} &= a_{24}, \\
v_{15} \leq v_1^{\max}, v_{25} \leq v_2^{\max}, q_{14} \leq q_1^{\max}, q_{24} \leq q_2^{\max}, \\
gt_{14} \leq g_t^{\max}, gh_{14} \leq gh_1^{\max}, gh_{24} \leq gh_2^{\max}, sp_{14} \geq 0, sp_{24} \geq 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
gt_{15} + gh_{15} + gh_{25} &= L_5, \\
v_{16} + q_{15} + sp_{15} - v_{15} &= a_{15}, \\
v_{26} + q_{25} + sp_{25} - k_2(q_{12} + sp_{12}) - k_1(q_{13} + sp_{13}) - v_{25} &= a_{25}, \\
v_{16} \leq v_1^{\max}, v_{26} \leq v_2^{\max}, q_{15} \leq q_1^{\max}, q_{25} \leq q_2^{\max}, \\
gt_{15} \leq g_t^{\max}, gh_{15} \leq gh_1^{\max}, gh_{25} \leq gh_2^{\max}, sp_{15} \geq 0, sp_{25} \geq 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
gt_{16} + gh_{16} + gh_{26} &= L_6, \\
v_{17} + q_{16} + sp_{16} - v_{16} &= a_{16}, \\
v_{27} + q_{26} + sp_{26} - k_4'(q_{13} + sp_{13}) - k_3'(q_{14} + sp_{14}) \\
- k_2'(q_{15} + sp_{15}) - k_1'(q_{16} + sp_{16}) - v_{26} &= a_{26} \\
v_{17} \leq v_1^{\max}, v_{27} \leq v_2^{\max}, q_{16} \leq q_1^{\max}, q_{26} \leq q_2^{\max}, \\
gt_{16} \leq g_t^{\max}, gh_{16} \leq gh_1^{\max}, gh_{26} \leq gh_2^{\max}, sp_{16} \geq 0, sp_{26} \geq 0.
\end{aligned}$$

em que,

$k_t$  constante de proporcionalidade a qual relaciona o percentual de volume de água incremental à usina 2 levando em consideração o tempo de viagem da água. Assim,  $k_1$  é igual a 6/7,  $k_2$  igual 1/7,  $k_1'$  igual a 1/2,  $k_2'$  igual a 7/30,  $k_3'$  igual a 7/30, e  $k_4'$  igual a 1/30.

Aplicando a teoria que envolve a DA, com o intuito de decompor o problema (119)-(120) em subproblemas menores, os quais representam cada um dos nós da árvore de cenários de vazões afluentes, tem-se:

- 1º estágio

$$f_1 = \min c \, g t_{11} + \alpha_1 \quad (121)$$

s.a:

$$\begin{aligned} g t_{11} + g h_{11} + g h_{21} &= L_1, \\ v_{12} + q_{11} + s p_{11} &= v_{11} + a_{11}, \\ v_{22} + q_{21} + s p_{21} &= v_{21} + a_{21}, \\ v_{12} &\leq v_1^{\max}, v_{22} \leq v_2^{\max}, q_{11} \leq q_1^{\max}, q_{21} \leq q_2^{\max}, \\ g t_{11} &\leq g t^{\max}, g h_{11} \leq g h_1^{\max}, g h_{21} \leq g h_2^{\max}, s p_{11} \geq 0, s p_{21} \geq 0. \end{aligned} \quad (122)$$

• 2º estágio

$$f_2 = \min c \, g t_{12} + \alpha_2 \quad (123)$$

s.a:

$$\begin{aligned} g t_{12} + g h_{12} + g h_{22} &= L_2, \\ v_{13} + q_{12} + s p_{12} &= v_{12} + a_{12}, \\ v_{23} + q_{22} + s p_{22} &= v_{22} + a_{22}, \\ v_{13} &\leq v_1^{\max}, v_{23} \leq v_2^{\max}, q_{12} \leq q_1^{\max}, q_{22} \leq q_2^{\max}, \\ g t_{12} &\leq g t^{\max}, g h_{12} \leq g h_1^{\max}, g h_{22} \leq g h_2^{\max}, s p_{12} \geq 0, s p_{22} \geq 0. \end{aligned} \quad (124)$$

• 3º estágio

$$f_3 = \min c \, g t_{13} + \alpha_3 \quad (125)$$

s.a:

$$\begin{aligned} g t_{13} + g h_{13} + g h_{23} &= L_3, \\ v_{14} + q_{13} + s p_{13} &= v_{13} + a_{13}, \\ v_{24} + q_{23} + s p_{23} &= v_{23} + a_{23} + k_1 (q_{11} + s p_{11}), \\ v_{14} &\leq v_1^{\max}, v_{24} \leq \bar{v}_2, q_{13} \leq q_1^{\max}, q_{23} \leq q_2^{\max}, \\ g t_{13} &\leq g t^{\max}, g h_{13} \leq g h_1^{\max}, g h_{23} \leq g h_2^{\max}, s p_{13} \geq 0, s p_{23} \geq 0. \end{aligned} \quad (126)$$

• 4º estágio

$$f_4 = \min c \, g t_{14} + \alpha_4 \quad (127)$$



s.a:

$$\begin{aligned}
 gt_{14} + gh_{14} + gh_{24} &= L_4, \\
 v_{15} + q_{14} + sp_{14} &= v_{14} + a_{14}, \\
 v_{25} + q_{24} + sp_{24} &= v_{24} + a_{24} + k_2 (q_{11} + sp_{11}) + k_1 (q_{12} + sp_{12}), \\
 v_{15} \leq v_1^{\max}, v_{25} &\leq v_2^{\max}, q_{14} \leq q_1^{\max}, q_{24} \leq q_2^{\max}, \\
 gt_{14} \leq gt_1^{\max}, gh_{14} &\leq gh_1^{\max}, gh_{24} \leq gh_2^{\max}, sp_{14} \geq 0, sp_{24} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{128}$$

• 5º estágio

$$f_5 = \min c \, gt_{15} + \alpha_5 \tag{129}$$

s.a:

$$\begin{aligned}
 gt_{15} + gh_{15} + gh_{25} &= L_5, \\
 v_{16} + q_{15} + sp_{15} - v_{15} &= a_{15}, \\
 v_{26} + q_{25} + sp_{25} &= v_{25} + a_{25} + k_2 (q_{12} + sp_{12}) + k_1 (q_{13} + sp_{13}), \\
 v_{16} \leq v_1^{\max}, v_{26} &\leq v_2^{\max}, q_{15} \leq q_1^{\max}, q_{25} \leq q_2^{\max}, \\
 gt_{15} \leq gt_1^{\max}, gh_{15} &\leq gh_1^{\max}, gh_{25} \leq gh_2^{\max}, sp_{15} \geq 0, sp_{25} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{130}$$

• 6º estágio

$$f_6 = \min c \, gt_{16} \tag{131}$$

s.a:

$$\begin{aligned}
 gt_{16} + gh_{16} + gh_{26} &= L_6, \\
 v_{17} + q_{16} + sp_{16} - v_{16} &= a_{16}, \\
 v_{27} + q_{26} + sp_{26} - k_1' (q_{16} + sp_{16}) &= a_{26} + v_{26} \\
 + k_4' (q_{13} + sp_{13}) + k_3' (q_{14} + sp_{14}) &+ k_2' (q_{15} + sp_{15}) \\
 v_{17} \leq v_1^{\max}, v_{27} &\leq v_2^{\max}, q_{16} \leq q_1^{\max}, q_{26} \leq q_2^{\max}, \\
 gt_{16} \leq gt_1^{\max}, gh_{16} &\leq gh_1^{\max}, gh_{26} \leq gh_2^{\max}, sp_{16} \geq 0, sp_{26} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{132}$$

Do problema dual resultante do subproblema (131)-(132), em que  $\pi_{16}$  e  $\pi_{26}$  são os multiplicadores simplex associados às restrições de balanço hídrico dos reservatórios 1 e 2, respectivamente, e  $f_6$  o valor ótimo do subproblema, é possível escrever o Cortes de Benders ou equação recursiva para o estágio 5 da seguinte forma (etapa *backward*):

$$\begin{aligned}
\alpha_5 - f_6 \geq & \pi_{16} (v_{16} - v_{16}^0) + \pi_{26} (v_{26} - v_{26}^0) + k_2' \pi_{26} (q_{15} - q_{15}^0) \\
& + k_2' \pi_{26} (sp_{15} - sp_{15}^0) + k_3' \pi_{26} (q_{14} - q_{14}^0) + k_3' \pi_{26} (sp_{14} - sp_{14}^0) \\
& k_4' \pi_{26} (q_{13} - q_{13}^0) + k_4' \pi_{26} (sp_{13} - sp_{13}^0).
\end{aligned} \quad (133)$$

Então, o subproblema referente ao estágio 5 torna-se igual a:

$$f_5 = \min c \, gt_{15} + \alpha_5 \quad (134)$$

s.a:

$$\begin{aligned}
gt_{15} + gh_{15} + gh_{25} &= L_5, \\
v_{16} + q_{15} + sp_{15} - v_{15} &= a_{15}, \\
v_{26} + q_{25} + sp_{25} &= v_{25} + a_{25} + k_2 (q_{12} + sp_{12}) + k_1 (q_{13} + sp_{13}), \\
\alpha_5 - \pi_{16} v_{16} - \pi_{26} v_{26} - k_2' \pi_{26} q_{15} - k_2' \pi_{26} sp_{15} - k_3' \pi_{26} q_{14} - k_3' \pi_{26} sp_{14} \\
&- k_4' \pi_{26} q_{13} - k_4' \pi_{26} sp_{13} \geq \\
f_6 - \pi_{16} v_{16} - \pi_{26} v_{26}^0 + k_2' \pi_{26} q_{15}^0 - k_2' \pi_{26} sp_{15}^0 - k_3' \pi_{26} q_{14}^0 - k_3' \pi_{26} sp_{14}^0 \\
&+ k_4' \pi_{26} q_{13}^0 + k_4' \pi_{26} sp_{13}^0, \\
v_{16} \leq v_1^{\max}, v_{26} \leq v_2^{\max}, q_{15} \leq q_1^{\max}, q_{25} \leq q_2^{\max}, \\
gt_{15} \leq gt_1^{\max}, gh_{15} \leq gh_1^{\max}, gh_{25} \leq gh_2^{\max}, sp_{15} \geq 0, sp_{25} \geq 0.
\end{aligned} \quad (135)$$

Considerando o subproblema (134)-(135), é possível construir a equação recursiva para o estágio 4 seguindo o mesmo raciocínio anterior, sabendo que  $\lambda_5$  é o multiplicador simplex relativo à equação recursiva (133).

$$\begin{aligned}
\alpha_4 - f_5 \geq & \pi_{15} (v_{15} - v_{15}^0) + \pi_{25} (v_{25} - v_{25}^0) + \lambda_5 k_3' \pi_{26} (q_{14} - q_{14}^0) \\
& + \lambda_5 k_3' \pi_{26} (sp_{14} - sp_{14}^0) + (k_1 \pi_{25} + \lambda_5 k_4' \pi_{26}) (q_{13} - q_{13}^0) \\
& + (k_1 \pi_{25} + \lambda_5 k_4' \pi_{26}) (sp_{13} - sp_{13}^0) + k_2 \pi_{25} (q_{12} - q_{12}^0) \\
& + k_2 \pi_{25} (sp_{12} - sp_{12}^0).
\end{aligned} \quad (136)$$

Assim, para o estágio 4, o subproblema pode ser escrito da seguinte forma:

$$f_4 = \min c \, gt_{14} + \alpha_4 \quad (137)$$

s.a:

$$\begin{aligned}
 &gt_{14} + gh_{14} + gh_{24} = L_4, \\
 &v_{15} + q_{14} + sp_{14} = v_{14} + a_{14}, \\
 &v_{25} + q_{24} + sp_{24} = v_{24} + a_{24} + k_2(q_{11} + sp_{11}) + k_1(q_{12} + sp_{12}), \\
 &\alpha_4 - \pi_{15}v_{15} - \pi_{25}v_{25} - \lambda_5 k_3' \pi_{26} q_{14} - \lambda_5 k_3' \pi_{26} sp_{14} \\
 &- (k_1 \pi_{25} + \lambda_5 k_4' \pi_{26}) q_{13} \\
 &- (k_1 \pi_{25} + \lambda_5 k_4' \pi_{26}) sp_{13} - k_2 \pi_{25} q_{12} - k_2 \pi_{25} sp_{12} \geq \\
 &f_5 - \pi_{15}v_{15}^0 - \pi_{25}v_{25}^0 - \lambda_5 k_3' \pi_{26} q_{14}^0 - \lambda_5 k_3' \pi_{26} sp_{14}^0 \\
 &- (k_1 \pi_{25} + \lambda_5 k_4' \pi_{26}) q_{13}^0 \\
 &- (k_1 \pi_{25} + \lambda_5 k_4' \pi_{26}) sp_{13}^0 - k_2 \pi_{25} q_{12}^0 - k_2 \pi_{25} sp_{12}^0, \\
 &v_{15} \leq v_1^{\max}, v_{25} \leq v_2^{\max}, q_{14} \leq q_1^{\max}, q_{24} \leq q_2^{\max}, \\
 &gt_{14} \leq gt_1^{\max}, gh_{14} \leq gh_1^{\max}, gh_{24} \leq gh_2^{\max}, sp_{14} \geq 0, sp_{24} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{138}$$

Por sua vez, a equação recursiva para o estágio 3 pode ser escrita como segue:

$$\begin{aligned}
 &\alpha_3 - \pi_{14}v_{14} - \pi_{24}v_{24} - \lambda_4(k_1 \pi_{25} + \lambda_5 \pi_{26}) q_{13} \\
 &- \lambda_4(k_1 \pi_{25} + \lambda_5 \pi_{26}) sp_{13} \\
 &- (k_1 \pi_{24} + \lambda_4 k_2 \pi_{25}) q_{12} - (k_1 \pi_{24} + \lambda_4 k_2 \pi_{25}) sp_{12} \\
 &- k_2 \pi_{24} q_{11} - k_2 \pi_{24} sp_{11} \geq \\
 &f_4 - \pi_{14}v_{14}^0 - \pi_{24}v_{24}^0 - \lambda_4(k_1 \pi_{25} + \lambda_5 k_4' \pi_{26}) q_{13}^0 \\
 &- \lambda_4(k_1 \pi_{25} + \lambda_5 k_4' \pi_{26}) sp_{13}^0 \\
 &- (k_1 \pi_{24} + \lambda_4 k_2 \pi_{25}) q_{12}^0 - (k_1 \pi_{24} + \lambda_4 k_2 \pi_{25}) sp_{12}^0 \\
 &- k_2 \pi_{24} q_{11}^0 - k_2 \pi_{24} sp_{11}^0
 \end{aligned} \tag{139}$$

Então, reescrevendo (125)-(126), tem-se:

$$f_3 = \min c \, gt_{13} + \alpha_3 \tag{140}$$

s.a:

$$\begin{aligned}
 &gt_{13} + gh_{13} + gh_{23} = L_3, \\
 &v_{14} + q_{13} + sp_{13} = v_{13} + a_{13}, \\
 &v_{24} + q_{23} + sp_{23} = v_{23} + a_{23} + k_1(q_{11} + sp_{11}), \\
 &\alpha_3 - \pi_{14}v_{14} - \pi_{24}v_{24} - \lambda_4(k_1\pi_{25} + \lambda_5k_4'\pi_{26})q_{13} \\
 &- \lambda_4(k_1\pi_{25} + \lambda_5k_4'\pi_{26})sp_{13} \\
 &- (k_1\pi_{24} + \lambda_4k_2\pi_{25})q_{12} - (k_1\pi_{24} + \lambda_4k_2\pi_{25})sp_{12} \\
 &- k_2\pi_{24}q_{11} - k_2\pi_{24}sp_{11} \geq \\
 &f_4 - \pi_{14}v_{14}^0 - \pi_{24}v_{24}^0 - \lambda_4(k_1\pi_{25} + \lambda_5k_4'\pi_{26})q_{13}^0 \\
 &- \lambda_4(k_1\pi_{25} + \lambda_5k_4'\pi_{26})sp_{13}^0 \\
 &- (k_1\pi_{24} + \lambda_4k_2\pi_{25})q_{12}^0 - (k_1\pi_{24} + \lambda_4k_2\pi_{25})sp_{12}^0 \\
 &- k_2\pi_{24}q_{11}^0 - k_2\pi_{24}sp_{11}^0, \\
 &v_{14} \leq v_{14}^{\max}, v_{24} \leq \bar{v}_2, q_{13} \leq q_{13}^{\max}, q_{23} \leq q_{23}^{\max}, \\
 &gt_{13} \leq gt^{\max}, gh_{13} \leq gh_1^{\max}, gh_{23} \leq gh_2^{\max}, sp_{13} \geq 0, sp_{23} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{141}$$

Seguindo o mesmo procedimento, a equação recursiva para o estágio 2 é igual a:

$$\begin{aligned}
 &\alpha_2 - f_3 \geq \pi_{13}(v_{13} - v_{13}^0) + \pi_{23}(v_{23} - v_{23}^0) \\
 &+ \lambda_3(k_1\pi_{24} + \lambda_4\pi_{25}k_2)(q_{12} - q_{12}^0) \\
 &+ \lambda_3(k_1\pi_{24} + \lambda_4\pi_{25}k_2)(sp_{12} - sp_{12}^0) \\
 &+ (k_1\pi_{23} + \lambda_3k_2\pi_{24})(q_{11} - q_{11}^0) \\
 &+ (k_1\pi_{23} + \lambda_3k_2\pi_{24})(sp_{11} - sp_{11}^0).
 \end{aligned} \tag{142}$$

O subproblema relativo ao estágio 2 pode, então, ser reescrito conforme (143)-(144).

$$f_2 = \min c gt_{12} + \alpha_2 \tag{143}$$

s. a.:

$$\begin{aligned}
 &gt_{12} + gh_{12} + gh_{22} = L_2, \\
 &v_{13} + q_{12} + sp_{12} = v_{12} + a_{12}, \\
 &v_{23} + q_{22} + sp_{22} = v_{22} + a_{22}, \\
 &\alpha_2 - \pi_{13}v_{13} - \pi_{23}v_{23} - \lambda_3(k_1\pi_{24} + \lambda_4\pi_{25}k_2)q_{12} \\
 &- \lambda_3(k_1\pi_{24} + \lambda_4\pi_{25}k_2)sp_{12} \\
 &- (k_1\pi_{23} + \lambda_3k_2\pi_{24})q_{11} - (k_1\pi_{23} + \lambda_3k_2\pi_{24})sp_{11} \geq \\
 &f_3 - \pi_{13}v_{13}^0 - \pi_{23}v_{23}^0 - \lambda_3(k_1\pi_{24} + \lambda_4\pi_{25}k_2)q_{12}^0 \\
 &- \lambda_3(k_1\pi_{24} + \lambda_4\pi_{25}k_2)sp_{12}^0 \\
 &+ (k_1\pi_{23} + \lambda_3k_2\pi_{24})q_{11}^0 + (k_1\pi_{23} + \lambda_3k_2\pi_{24})sp_{11}^0, \\
 &v_{13} \leq v_1^{\max}, v_{23} \leq v_2^{\max}, q_{12} \leq q_1^{\max}, q_{22} \leq q_2^{\max}, \\
 &gt_{12} \leq gt^{\max}, gh_{12} \leq gh_1^{\max}, gh_{22} \leq gh_2^{\max}, sp_{12} \geq 0, sp_{22} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{144}$$

Por fim, para o estágio 1, a equação recursiva é:

$$\begin{aligned}
 &\alpha_1 - f_2 \geq \pi_{12}(v_{12} - v_{12}^0) + \pi_{22}(v_{22} - v_{22}^0) \\
 &+ \lambda_2(k_1\pi_{22} + \lambda_3k_2\pi_{24})(q_{11} - q_{11}^0) \\
 &+ \lambda_2(k_1\pi_{22} + \lambda_3k_2\pi_{24})(sp_{11} - sp_{11}^0).
 \end{aligned} \tag{145}$$

Como resultado desse processo, o subproblema de primeiro estágio torna-se:

$$f_1 = \min c gt_{11} + \alpha_1 \tag{146}$$

s. a:

$$\begin{aligned}
 gt_{11} + gh_{11} + gh_{21} &= L_1, \\
 v_{12} + q_{11} + sp_{11} &= v_{11} + a_{11}, \\
 v_{22} + q_{21} + sp_{21} &= v_{21} + a_{21}, \\
 \alpha_1 - \pi_{13}v_{12} - \pi_{23}v_{22} - \lambda_2(k_1\pi_{23} + \lambda_3k_2\pi_{24})q_{11} \\
 - \lambda_2(k_1\pi_{23} + \lambda_3k_2\pi_{24})sp_{11} &\geq \\
 f_2 - \pi_{13}v_{12}^0 - \pi_{23}v_{22}^0 - \lambda_2(k_1\pi_{23} + \lambda_3k_2\pi_{24})q_{11}^0 \\
 - \lambda_2(k_1\pi_{23} + \lambda_3k_2\pi_{24})sp_{11}^0, \\
 v_{12} \leq v_1^{\max}, v_{22} \leq v_2^{\max}, q_{11} \leq q_1^{\max}, q_{21} \leq q_2^{\max}, \\
 gt_{11} \leq gt^{\max}, gh_{11} \leq gh_1^{\max}, gh_{21} \leq gh_2^{\max}, sp_{11} \geq 0, sp_{21} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{147}$$

Com base das equações acima apresentadas, é possível concluir que o tempo de viagem da água entre aproveitamento insere uma complexidade adicional ao problema, em virtude do incremento de variáveis de estado do problema. Em outras palavras, devem-se levar em consideração os efeitos das decisões nos estágios anteriores nos estágios correntes, o que torna a atualização da equação recursiva mais dispendiosa.

## REFERÊNCIAS

AL-AGTASH, S. Hydrothermal Scheduling by Augmented Lagrangian: Consideration of Transmission Constraints and Pumped-Storage Units. **Power Engineering Review, IEEE**, v.21, n.8, p.58-59. 2001.

ANEEL - Agência Nacional de Energia Elétrica. **Banco de Informações de Geração**. Disponível em <http://www.aneel.gov.br/15.htm>. Acessado em 20 de Abril de 2011. 2011.

ANUKAL CHIRALAKSANAKUL, B. S. **Monte Carlo Methods for Multi-stage Stochastic Programs**. Department of Philosophy, University of Texas at Austin. Austin, Texas., 2003.

ARARIPE NETO, T. D. A.; COTIA, C. B.; KELMAN, J. Comparison of Stochastic and Deterministic Approaches in Hydrothermal Generation Scheduling. **IFAC Electrical Energy System**, p.201-206. Rio de Janeiro. 1985.

BATUT, J.; RENAUD, A. Daily generation scheduling optimization with transmission constraints: a new class of algorithms. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v.7, n.3, p.982-989. 1992.

BELLONI, A.; LIMA, A. L. D. S.; MACEIRA, M. E. P.; SAGASTIZÁBAL, C. A. Bundle Relaxation and Primal Recovery in Unit Commitment Problems. The Brazilian Case. **Annals of Operations Research**, v.120, n.1, p.21-44. 2003.

BENDERS, J. F. Partitioning Procedures for Solving Mixed Variables Programming Problems. **Numerische Mathematik**, v.4, p.238-252. 1962.

BERGER, A. J.; MULVEY, J.; RUSZCZYNSKI, A. An Extension of the DQA algorithm to Convex Stochastic Programs. **SIAM Journal of Optimization**, v.4, p.735-753. 1994.

BERTSEKAS, D. P. **Nonlinear programming**. Belmont, Mass.: Athena Scientific. x, 646 p. 1995.

BIRGE, J.; DONOHUE, C.; HOLMES, D.; SVINTSITSKI, O. A parallel implementation of the nested decomposition algorithm for multistage stochastic linear programs. **Mathematical Programming**, v.75, n.2, p.327-352. 1996.

BIRGE, J. R. Decomposition and Partitioning Methods for Multistage Stochastic Linear Programs. **Operations Research**, v.33, n.5, p.989-1007. 1985.

BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. **Introduction to Stochastic Programming**. Springer-Verlag New York. 1997.

BIRGIN, E. G.; CASTILLO, R. A.; MARTÍNEZ, J. M. Numerical Comparison of Augmented Lagrangian Algorithms for Nonconvex Problems. **Computational Optimization and Applications**, v.31, n.1, p.31-55. 2005.

CABERO, J.; BAILLO, A.; CERISOLA, S.; VENTOSA, M.; GARCIA-ALCALDE, A.; PERAN, F.; RELANO, G. A Medium-Term Integrated Risk Management Model for a Hydrothermal Generation Company. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v.20, n.3, p.1379-1388. 2005.

CENTENO, E.; RENESES, J.; BARQUIN, J. Strategic Analysis of Electricity Markets Under Uncertainty: A Conjectured-Price-Response Approach. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v.22, n.1, p.423-432. 2007.

CEPEL. **Modelo GEVAZP - Manual de Referência**. Centro de Pesquisas de Energia Elétrica. Rio de Janeiro. 2002

\_\_\_\_\_. **Modelo NEWAVE - Manual de Referência Versão 16.0**. Centro de Pesquisas de Energia Elétrica. Rio de Janeiro. 2010a

\_\_\_\_\_. **Modelo DECOMP - Manual de Referência Versão 16.0**. Rio de Janeiro. 2010b



CEPEL/ELETROBRÁS. **Modelo de Programação Dinâmica Estocástica para Operação de Sistemas Hidrotérmicos**. Relatório Técnico CEPEL N 144/77. 1977

CHRISTOFORIDIS, M.; AGANAGIC, M.; AWOBAMISE, B.; TONG, S.; RAHIMI, A. F. Long-term/mid-term resource optimization of a hydrodominant power system using interior point method. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v.11, n.1, p.287-294. 1996.

COHEN, G. Auxiliary problem principle and decomposition of optimization problems. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v.32, n.3, p.277-305. 1980.

CONTAXIS, G. C.; KAVATZA, S. D. Hydrothermal scheduling of a multireservoir power system with stochastic inflows. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v.5, n.3, p.766-773. 1990.

CUNHA, S. H. F.; PRADO, S.; DA COSTA, J. P. Modelagem da Produtividade Variável de Usinas Hidrelétricas com base na Construção de uma Função de Produção Energética. In: **XII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, ABRH**, p.391-397 1997.

DA COSTA, J. P.; DE OLIVEIRA, G. C.; LEGEY, L. F. L. Reduced Scenario Tree Generation for Mid-term Hydrothermal Operation Planning. In: **Probabilistic Methods Applied to Power Systems, 2006. PMAPS 2006. International Conference on**, p.1-7. 2006.

DE LADURANTAYE, D.; GENDREAU, M.; POTVIN, J.-Y. Optimizing profits from hydroelectricity production. **Computers & Operations Research**, v.36, n.2, p.499-529. 2009.

DEMPSTER, M. A. H.; THOMPSON, R. T. Parallelization and aggregation of nested Benders decomposition. **Annals of Operations Research**, v.81, p.163-187. 1998.

DIAS, B. H.; MARCATO, A. L. M.; SOUZA, R. C.; SOARES, M. P.; JUNIOR, I. C. S.; OLIVEIRA, E. J. Stochastic Dynamic Programming Applied to Hydrothermal Power Systems Operation Planning Based on the

Convex Hull Algorithm. **Mathematical Problems in Engineering**, v.2010, p.20. 2010.

DINIZ, A. L. **Uma Estratégia de Decomposição por Relaxação Lagrangeana para a Otimização da Programação Diária da Operação de Sistemas Hidrotérmicos com Modelagem Detalhada na Rede Elétrica - Aplicação ao Sistema Brasileiro**. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Centro Tecnológico, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2007.

DINIZ, A. L.; SAGASTIZABAL, C.; MACEIRA, M. E. P. Assessment of Lagrangian Relaxation with Variable Splitting for Hydrothermal Scheduling. In: **Power Engineering Society General Meeting, 2007. IEEE**. 24-28 June 2007, p.1-8. 2007.

DINIZ, A. L.; MACEIRA, M. E. P. A Four-Dimensional Model of Hydro Generation for the Short-Term Hydrothermal Dispatch Problem Considering Head and Spillage Effects. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v.23, n.3, p.1298-1308. 2008.

DUPAČOVÁ, J.; CONSIGLI, G.; WALLACE, S. W. Scenarios for Multistage Stochastic Programs. **Annals of Operations Research**, v.100, p.25-53. Dec. 2000.

ENAMORADO, J. C.; RAMOS, A.; GOMEZ, T. Multi-area decentralized optimal hydro-thermal coordination by the Dantzig-Wolfe decomposition method. In: **Power Engineering Society Summer Meeting, 2000. IEEE**, v.4, p.2027-2032 vol. 4. 2000.

ESCUDERO, L. F.; DE LA FUENTE, J. L.; GARCÍA, C.; PRIETO, F. J. A parallel computation approach for solving multistage stochastic network problems. **Annals of Operations Research**, v.90, n.0, p.131-160. 1999.

ESCUDERO, L. F. WARSYP: A robust modeling approach for water resources system planning under uncertainty. **Annals of Operations Research**, v.95, n.1-4, p.313-339. 2000.

FINARDI, E. C. **Alocação de Unidades Geradoras Hidrelétricas em Sistemas Hidrotérmicos Utilizando Relaxação Lagrangeana e Programação Quadrática Sequencial**. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2003.

FINARDI, E. C.; DA SILVA, E. L.; SAGASTIZABAL, C. A. Solving the Unit Commitment Problem of Hydropower Plants Via Relaxation Lagrangian and Sequential Quadratic Programming. **Matemática Aplicada e Computacional** v.24, n.3, p.1-25. 2005.

FINARDI, E. C.; DA SILVA, E. L. Solving the Hydro Unit Commitment via Dual Decomposition and Sequential Quadratic Programming. **IEEE transaction on power systems**, v.21, n.2, p.835-844. 2006.

FINARDI, E. C.; GONÇALVES, R. E. C.; MATOS, V. L. D. **Estudo de Propostas Metodológicas Para a Redução da Volatilidade do Preço de Liquidação de Diferenças**. LabPlan - UFSC. Florianópolis. 2010

FINARDI, E. C.; SCUZZIATO, M. R. A Model to Accounting for Losses in the Unit Commitment Problem at Brazilian Hydro Plants. In: **17th Power Systems Computation Conference (PSCC)**, Estocolmo - Suécia, 2011.

FOURER, R.; LOPES, L. A management system for decompositions in stochastic programming. **Annals of Operations Research**, v.142, n.1, p.99-118. 2006.

FUENTES-LOYOLA, R.; QUINTANA, V. H.; MADRIGAL, M. A Performance Comparison of Primal-Dual Interior Point Method Vs Lagrangian Relaxation to Solve the Medium Term Hydro-Thermal Coordination Problem. In: **IEEE Power Engineering Society Summer**, Seattle, v.4, p.2255-2260. 2000.

FUENTES-LOYOLA, R.; QUINTANA, V. H. Medium-Term Hydro-Thermal Coordination by Semidefinite Programming. **Power Engineering Review, IEEE**, v.22, n.12, p.59-59. 2002.

GONÇALVES, R. E. C. **Análise Comparativa entre Diferentes Métodos de Otimização Estocástica na Solução do Problema do Planejamento da Operação de Curto Prazo**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC. Florianópolis - SC, 2007.

GONÇALVES, R. E. C.; FINARDI, E. C.; SILVA, E. L. Exploring The Progressive Hedging Characteristics in the Solution of the Medium-term Operation Planning Problem. In: **17th Power Systems Computation Conference (PSCC)**, Estocolmo - Suécia, 2011a.

GONÇALVES, R. E. C.; FINARDI, E. C.; SILVA, E. L. D. Applying different decomposition schemes using the progressive hedging algorithm to the operation planning problem of a hydrothermal system. **Electric Power Systems Research**, v.83, n.1, p.19-27. 2011b.

GONÇALVES, R. E. C.; FINARDI, E. C.; SILVA, E. L. D.; SANTOS, M. L. L. D. Comparing stochastic optimization methods to solve the medium-term operation planning problem. **Computational & Applied Mathematics**, v.30, p.289-313. 2011c.

GORENSTIN, B. G.; CAMPODONICO, N. M.; COSTA, J. P.; PEREIRA, M. V. F. Stochastic optimization of a hydro-thermal system including network constraints. In: **Power Industry Computer Application Conference, 1991. Conference Proceedings**, p.127-133. 1991.

GREENGARD, C.; RUSZCZYNSKI, A. P. **Decision making under uncertainty : energy and power**. New York: Springer. ix, 154 p. p., IMA volumes in mathematics and its applications. 2002.

GROWE-KUSKA, N.; HEITSCH, H.; ROMISCH, W. Scenario reduction and scenario tree construction for power management problems. In: **Power Tech Conference Proceedings, 2003 IEEE Bologna**. 23-26 June 2003, v.3, p.7 pp. Vol.3. 2003.

HELGASON, T.; WALLACE, S. W. Approximate scenario solutions in the progressive hedging algorithm: a numerical study. **Ann. Oper. Res.**, v.31, n.1-4, p.425-444. 1991.

JACOBS, J.; FREEMAN, G.; GRYGIER, J.; MORTON, D.; SCHULTZ, G.; STASCHUS, K.; STEDINGER, J. SOCRATES: A system for scheduling hydroelectric generation under uncertainty. **Annals of Operations Research**, v.59, n.1, p.99-133. 1995.

JHA, D. K.; YORINO, N.; ZOKA, Y.; SASAKI, Y.; HAYASHI, Y.; IWATA, K.; OE, R. Penalty Factor Approach of Minimizing Spill in Finding Operating Policy for Reservoir of a Hydropower Plant: A Case of Japan. In: **Computer and Electrical Engineering, 2008. ICCEE 2008. International Conference on**. 20-22 Dec. 2008, p.3-7. 2008.

KOUWENBERG, R. Scenario generation and stochastic programming models for asset liability management. **European Journal of Operational Research**, v.134, n.2, p.279-292. 2001.

LAU, K. K.; WOMERSLEY, R. S. Multistage quadratic stochastic programming. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v.129, n.1-2, p.105-138. 2001.

LEMARÉCHAL, C.; PELLEGRINO, F.; RENAUD, A.; SAGASTIZÁBAL, C. Bundle Methods Applied to the Unit Commitment Problem. **System Modeling and Optimization**, p.395-402. 1996.

LEMARÉCHAL, C. Lagrangian Relaxation  
Computational Combinatorial Optimization. In: Michael JüngerDenis Naddef (Ed.): Springer Berlin / Heidelberg, v.2241, 2001. Lagrangian Relaxation  
Computational Combinatorial Optimization, p.112-156. (Lecture Notes in Computer Science)

LEMARÉCHAL, C.; SAGASTIZÁBAL, C. **Use of Code N1CV2**. France. 2002

LUH, P. B.; ZHANG, D.; TOMASTIK, R. N. An algorithm for solving the dual problem of hydrothermal scheduling. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v.13, n.2, p.593-600. 1998.

MACEIRA, M. E. P.; MARCATO, R. M.; MARCATO, A. L. M. Comparação entre abordagens estocásticas e determinísticas no planejamento da operação de médio prazo de sistemas hidrotérmicos interligados. In: **SEMINÁRIO NACIONAL DE PRODUÇÃO E TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA - SNPTEE (XVII.:Out.: Uberlândia)**, Uberlândia - MG, 2003.

MARTINEZ, L.; SOARES, S. Primal and dual stochastic dynamic programming in long term hydrothermal scheduling. In: **Power Systems Conference and Exposition, 2004. IEEE PES**, p.1283-1288 vol.3. 2004a.

MARTINEZ, L.; SOARES, S. Primal and dual stochastic dynamic programming in long term hydrothermal scheduling. **Power Systems Conference and Exposition, 2004. IEEE PES**, p.1283-1288 vol.3. 2004b.

MATOS, V. L. D. **Análise Comparativa entre as Modelagens de Reservatório Equivalente de Energia Agregado por Subistema e por Cascata no Problema do Planejamento Anual da Operação Energética**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis-SC, 2008.

MATOS, V. L. D.; FINARDI, E. C.; DA SILVA, E. L. Comparison between the Energy Equivalent Reservoir per Subsystem and per Cascade in the Long-Term Operational Planning in Brazil. In: **International Conference on Engineering Optimization - EngOpt**, Rio de Janeiro, 2008.

MD SAYEED, S. Comparison of Lagrangian relaxation and truncated dynamic programming methods for solving hydrothermal coordination problems. In: **Intelligent Sensing and Information Processing, 2004. Proceedings of International Conference on**, p.265-270. 2004.

MEDINA, J.; QUINTANA, V. H.; CONEJO, A. J.; THODEN, F. P. A comparison of interior-point codes for medium-term hydro-thermal coordination. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v.13, n.3, p.836-843. 1998.

Microsoft Corporation, . **Windows Support for Hyper-Threading Technology**. Disponível em <http://msdn.microsoft.com/en-us/windows/hardware/gg463502.aspx>. Acessado em 2002.

MORTON, D. An enhanced decomposition algorithm for multistage stochastic hydroelectric scheduling. **Annals of Operations Research**, v.64, n.1, p.211-235. 1996.

MORTON, D. P. Stopping rules for a class of sampling-based stochastic programming algorithms. **Operations Research**, p.710. 1998.

MULVEY, J.; VLADIMIROU, H. Applying the progressive hedging algorithm to stochastic generalized networks. **Annals of Operations Research**, v.31, n.1, p.399-424. 1991.

NIELSEN, S. S.; ZENIOS, S. A. Scalable parallel Benders decomposition for stochastic linear programming. **Parallel Computing**, v.23, n.8, p.1069-1088. 1997.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization**. New York: Springer. xx, 636 p. p., Springer series in operations research. 1999.

NOLDE, K.; UHR, M.; MORARI, M. Medium term scheduling of a hydro-thermal system using stochastic model predictive control. **Automatica**, v.44, n.6, p.1585-1594. 2008.

ONS - Operador Nacional do Sistema. **Procedimentos de rede, Submódulo 18.2: Modelos Computacionais**. Disponível em <http://extranet.ons.org.br/operacao/prdocme.nsf/83E7F406D2F98B268325774C0075C45A/922533B616864D4D832575F600704AA1?OpenDocument>. Acessado em 25 de abril de 2011. 2011a.

ONS - Operador Nacional do Sistema. **Procedimentos de rede, Submódulo 8.1: Programação Diária da Operação Eletroenergética**. Disponível em <http://extranet.ons.org.br/operacao/prdocme.nsf/83E7F406D2F98B268325774C0075C45A/C3056D3F53466D21832575F600649E59?OpenDocument>. Acessado em 25 de abril de 2011. 2011b.

ONS - Operador Nacional do Sistema. **Procedimentos de rede, Submódulo 7.3: Programação Mensal da Operação Energética.** Disponível em

<http://extranet.ons.org.br/operacao/prdocme.nsf/83E7F406D2F98B268325774C0075C45A/96EFDA0E68E764EE832575F60063472E?OpenDocument>. Acessado em 25 de abril de 2011. 2011c.

ONS - Operador Nacional do Sistema. **Procedimentos de rede, Submódulo 7.2: Planejamento Anual da Operação Energética.** Disponível em

<http://extranet.ons.org.br/operacao/prdocme.nsf/83E7F406D2F98B268325774C0075C45A/C32A738DDAC48DD4832575F600633138?OpenDocument>. Acessado em 25 de abril de 2011. 2011d.

PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. Operation Planning of large-scale Hydroelectrical Systems. In: **8th Power System Computation Conference (PSCC)**, Helsinki, Finland, 1984.

PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. Stochastic Optimization of a Multireservoir Hydroelectric System: A Decomposition Approach. **Water Resources Research**, v.21, n.6, p.779-792. 1985.

PEREIRA, M. V. F. Optimal Stochastic Operations Scheduling of large Hydroelectric Systems. **Electr. Power Energy Systems**, v.11, n.3, p.161-169. 1989.

ROCKAFELLAR, R. T.; WETS, R. J. B. Scenarios and Policy Aggregation in Optimization under Uncertainty. **Mathematical of Operations Research**, v.16, p.119-147. 1991.

RODRIGUES, R. N.; FINARDI, E. C.; SILVA, E. L. Alocação de Unidades Hidrelétricas no Problema da Programação da Operação Energética Utilizando Relaxação Lagrangeana e Lagrangeano Aumentado. In: **SBA: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automática**, Brasil, v.17, p.155-167. 2006.



- ROSA, C.; RUSZCZYŃSKI, A. On augmented Lagrangian decomposition methods for multistage stochastic programs. **Annals of Operations Research**, v.64, n.1, p.289-309. 1996.
- RUSZCZYŃSKI, A.; SWIETANOWSKI, A. Accelerating the regularized decomposition method for two stage stochastic linear problems. **European Journal of Operational Research**, v.101, n.2, p.328-342. 1997.
- RUSZCZYŃSKI, A. Augmented Lagrangian Decomposition for Sparse Convex Optimization. **Annals of Operations Research**. 1992.
- RUSZCZYŃSKI, A. Decomposition methods in stochastic programming. **Mathematical Programming**, v.79, n.1, p.333-353. 1997.
- RUSZCZYŃSKI, A.; SHAPIRO, A. **HandBooks in Operations Research and Management Science**. First edition. Netherlands: Elsevier Science B.V. v.10. 2003.
- SANTOS, M. L. L.; SILVA, E. L.; FINARDI, E. C.; GONÇALVES, R. E. C. Solving the Short Term Operating Planning Problem of Hydrothermal Systems by Using the Progressive Hedging Method. In: **16th Power System Computation Conference (PSCC)**, Glasgow, Scotland. July, 2008.
- SANTOS, M. L. L.; DA SILVA, E. L.; FINARDI, E. C.; GONÇALVES, R. E. C. Practical aspects in solving the medium-term operation planning problem of hydrothermal power systems by using the progressive hedging method. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v.31, n.9, p.546-552. 2009.
- SHAPIRO, A.; PHILPOTT, A. **A tutorial on stochastic programming**. Technical report. INFORMS Tutorials in Operations Research. 2007
- SHERALI, H. D.; LIM, C. Enhancing Lagrangian Dual Optimization for Linear Programs by Obviating Nondifferentiability. **INFORMS JOURNAL ON COMPUTING**, v.19, n.1, p.3-13. January 1, 2007. 2007.
- SHERKAT, V. R.; MOSLEHI, K.; LO, E. O.; SANCHEZ, G.; DIAZ, J. Modular and flexible software for medium and short-term hydrothermal

scheduling. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v.3, n.3, p.1390-1396. 1988.

SLYKE, R. M. V.; WETS, R. L-Shaped Linear Programs with Applications to Optimal Control and Stochastic Programming. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v.17, n.4, p.638-663. 1969.

SNIR, M. **MPI : the complete reference**. Cambridge, Mass.: MIT Press. xii, 336 p. p., Scientific and engineering computation series. 1996.

STROUSTRUP, B. **The C++ programming language**. 3rd. Reading, Mass.: Addison-Wesley. x, 910 p. p. 1997.

TAKIGAWA, F. Y. K. **Análise Comparativa de Diferentes Estratégias de Decomposição do Problema da Programação Diária da Operação de Sistemas Hidrotérmicos com Base na Relaxação Lagrangeana**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis -SC, 2006.

TAKIGAWA, F. Y. K.; FINARDI, E. C.; DA SILVA, E. L. A Comparative Analysis of Methods based on Lagrangian Relaxation and Augmented Lagrangian to solve the Short-term Hydrothermal Scheduling Problem. In: **Conferência Internacional de Otimização em Engenharia - EngOpt**, Rio de Janeiro, 2008.

TERRY, L. A.; PEREIRA, M. V. F.; ARARIPE NETO, T. D. A.; SILVA, L. F. C. A.; SALES, P. R. H. Coordinating the Energy Generation of the Brazilian National Hydrothermal Electrical Generating System. **Interfaces**, v.16, n.1, p.16-38. 1986.

WALLACE, S.; HELGASON, T. Structural properties of the progressive hedging algorithm. **Annals of Operations Research**, v.31, n.1, p.445-455. 1991.

WATCHORN, C. W. Inside Hydrothermal Coordination. **Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on**, v.PAS-86, n.1, p.106-117. 1967.

WATSON, J.-P.; WOODRUFF, D. Progressive hedging innovations for a class of stochastic mixed-integer resource allocation problems. **Computational Management Science**, p.1-16. 2010.

WETS, R. J.-B. Stochastic programming models: wait-and-see versus here-and-now. **Institute for Mathematics and Its Applications**, v.128, p.1. 2002.

WOOD, A. J.; WOLLENBERG, B. F. **Power generation, operation, and control**. 2nd. New York: J. Wiley & Sons. xv, 569 p. p. 1996.

YU, Z.; ULUCA, B. An oligopoly electricity competition model with probabilistic inflow & demand representations. In: **Probabilistic Methods Applied to Power Systems, 2004 International Conference on**. 12-16 Sept. 2004, p.380-385. 2004.

ZAMBELLI, M.; SIQUEIRA, T. G.; CICOONA, M.; SOARES, S. Deterministic versus stochastic models for long term hydrothermal scheduling. In: **Power Engineering Society General Meeting, 2006. IEEE**, p.7 pp. 2006.